mathematics vision project

Transforming Mathematics Education

SECONDARY MATH THREE

An Integrated Approach

Module 2 Funciones Logarítmicas

MATHEMATICSVISIONPROJECT.ORG

The Mathematics Vision Project

Scott Hendrickson, Joleigh Honey, Barbara Kuehl, Travis Lemon, Janet Sutorius

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved

MÓDULO 2 - TABLA DE CONTENIDO

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.1 Lógica de Logaritmos–*Actividad para Desarrollar Comprensión*
Evaluar y comparar expresiones logarítmicas. **(F.BF.5, F.LE.4)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. *Funciones Logarítmicas 2.1*

2.2 Cayéndose de un Logaritmo – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Graficar funciones logarítmicas con transformaciones. **(F.BF.3, F.BF.5, F.IF.7e)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.2*

2.3 Cortar Logaritmos – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Explorar las propiedades de los logaritmos. **(F.IF.8, F.LE.4)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.3*

2.4 Aritmética de Logaritmos – *Actividad para Practicar Comprensión*
Usar propiedades de logaritmos para evaluar expresiones. **(F.IF.8, F.LE.4)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.4*

2.5 Dieces Poderosos – *Actividad para Practicar Comprensión*
Resolver funciones exponenciales y logarítmicas de base 10 utilizando tecnología. **(F.LE.4)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.5*

2.6H Problema de Interés Compuesto – *Actividad para Desarrollar Comprensión*
Desarrollar el número *e*. **(F.LE.4)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.6H*

2.7H Los Logaritmos se vuelven Virales – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Usar funciones exponenciales de base *e* y los logaritmos naturales para modelar el crecimiento y la decadencia continuos **(F.LE.4)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.7H*

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.8H Elige esto, no aquello – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.8H*

2.9H No olvides tu Logaritmo – *Actividad para Practicar Comprensión*
Resolver y categorizar ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Logarítmicas *2.9H*

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

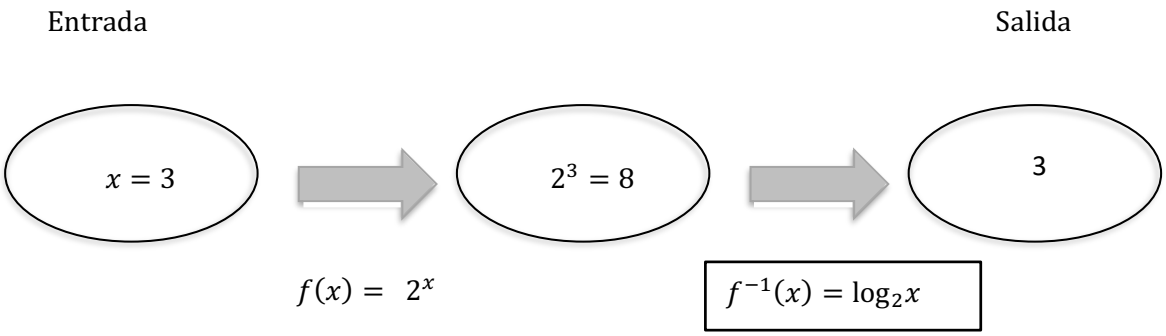
2.1 Lógica de Logaritmos

Actividad para Desarrollar Comprensión

CC BY Andrew Binham
https://flic.kr/p/d9epSy

Comenzamos a pensar en los logaritmos como funciones inversas para exponenciales en *Rastreando a la Tortuga*. Las funciones logarítmicas son interesantes y útiles por sí mismas. En las siguientes tareas, trabajaremos en la comprensión de expresiones logarítmicas, funciones logarítmicas y operaciones logarítmicas en ecuaciones.

Mostramos la relación inversa entre funciones exponenciales y logarítmicas usando un diagrama como el siguiente:



Podríamos resumir esta relación diciendo:

$$2^3 = 8 \quad \text{so,} \quad \log_2 8 = 3$$

Los logaritmos se pueden definir para cualquier base utilizada para una función exponencial. La base 10 es popular. Usando la base 10, puedes escribir declaraciones como estas:

$$10^1 = 10 \qquad \text{so,} \qquad \log_{10} 10 = 1$$

$$10^2 = 100 \qquad \text{so,} \qquad \log_{10} 100 = 2$$

$$10^3 = 1000 \qquad \text{so,} \qquad \log_{10} 1000 = 3$$

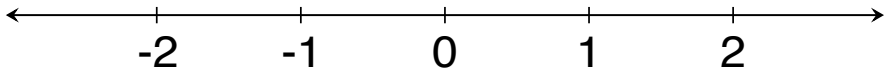
La notación puede verse diferente, pero puedes ver el patrón inverso donde cambian las entradas y salidas.

Los próximos problemas te darán la oportunidad de practicar este patrón y posiblemente hacer algunas conjeturas sobre otros patrones relacionados con los logaritmos.

Coloca las siguientes expresiones en la recta numérica. Usa el espacio debajo de la recta numérica para explicar cómo sabías dónde colocar cada expresión.

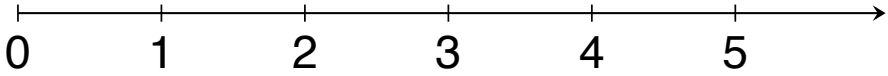
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

1. A. $\log_3 3$ B. $\log_3 9$ C. $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$ D. $\log_3 1$ E. $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$



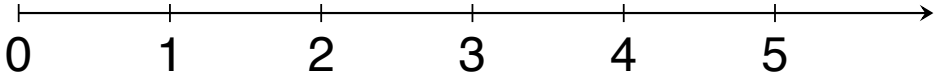
Explica: _____

2. A. $\log_3 81$ B. $\log_{10} 100$ C. $\log_8 8$ D. $\log_5 25$ E. $\log_2 32$



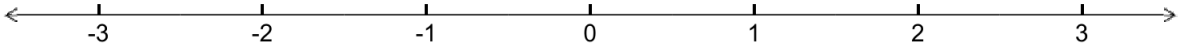
Explica: _____

3. A. $\log_7 7$ B. $\log_9 9$ C. $\log_{11} 1$ D. $\log_{10} 1$



Explica: _____

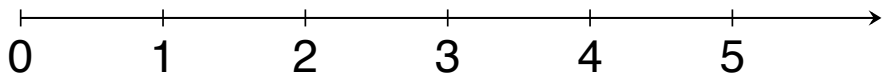
4. A. $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$ B. $\log_{10}\left(\frac{1}{1000}\right)$ C. $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$ D. $\log_6\left(\frac{1}{6}\right)$



Explica: _____

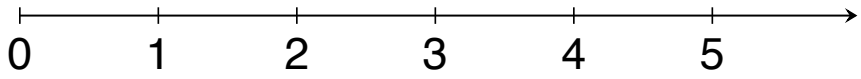
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

5. A. $\log_4 16$ B. $\log_2 16$ C. $\log_8 16$ D. $\log_{16} 16$



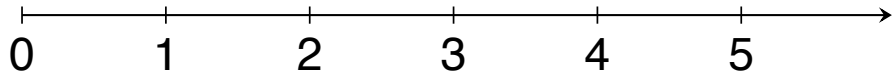
Explica: _____

6. A. $\log_2 5$ B. $\log_5 10$ C. $\log_6 1$ D. $\log_5 5$ E. $\log_{10} 5$



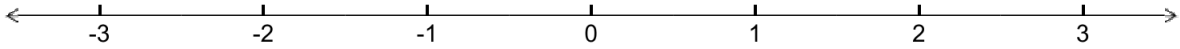
Explica: _____

7. A. $\log_{10} 50$ B. $\log_{10} 150$ C. $\log_{10} 1000$ D. $\log_{10} 500$



Explica: _____

8. A. $\log_3 3^2$ B. $\log_5 5^{-2}$ C. $\log_6 6^0$ D. $\log_4 4^{-1}$ E. $\log_2 2^3$



Explica: _____

Basándote en tu trabajo con expresiones logarítmicas, determina si cada una de estas afirmaciones siempre es verdadera, a veces verdadera o nunca verdadera. Si la declaración a veces es verdadera, describe las condiciones que la hacen verdadera. Explica tus respuestas.

9. El valor de $\log_b x$ es positivo.

Explica: _____

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

10. $\log_b x$ no es una expresión válida si x es un número negativo.

Explica: _____

11. $\log_b 1 = 0$ para cualquier base, b > 0.

Explica: _____

12. $\log_b b = 1$ para cualquier b > 0.

Explica: _____

13. $\log_2 x < \log_3 x$ para cualquier valor de x.

Explica: _____

14. $\log_b b^n = n$ para cualquier b > 0.

Explica: _____

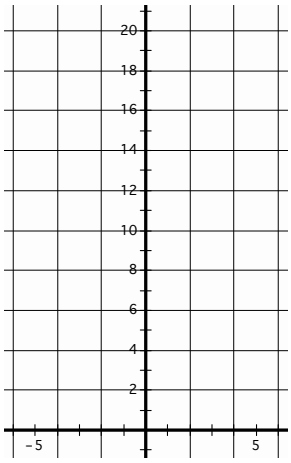
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

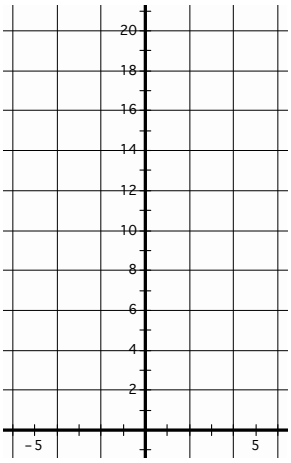
Tema: Representación gráfica de ecuaciones exponenciales

Grafica cada función sobre el dominio $\{-4 \leq x \leq 4\}$.

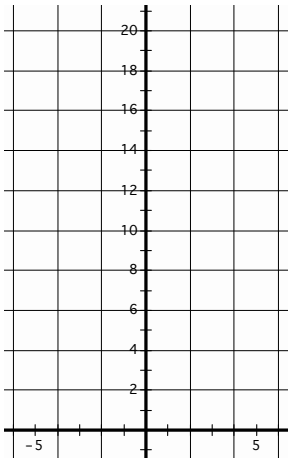
1. $y = 2^x$



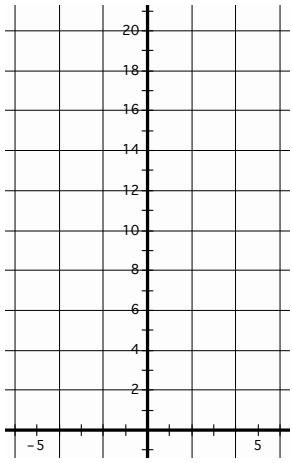
2. $y = 2 \cdot 2^x$



3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



4. $y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$



5. Compara la gráfica # 1 con la gráfica # 2. Multiplicar por 2 debería generar una dilatación de la gráfica, pero la gráfica parece que se ha trasladado verticalmente. ¿Cómo explicas eso?

6. Compara la gráfica # 3 con la gráfica # 4. ¿Tu explicación del # 5 sigue siendo válida para estas dos gráficas? Explica.

PRÁCTICA

Tema: Escribir la forma logarítmica de una ecuación exponencial

Definición de logaritmo: *para todos los números positivos a, donde a ≠ 1, y para todos los números positivos x;* $\boldsymbol{y = log_a x}$ *significa lo mismo que* $\boldsymbol{x = a^y}$.

(Nota que la ***base*** *del exponente y la base del logaritmo son ambas* $\boldsymbol{a}$*).*

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

7. ¿Por qué es importante que en la definición de logaritmo se indique que la base del logaritmo no es igual a 1?

8. ¿Por qué es importante que la definición de un logaritmo indique que la base del logaritmo es positiva?

9. ¿Por qué es necesario que la definición indique que $\boldsymbol{x}$ en la expresión $\boldsymbol{log_a x}$ es positiva?

Escribe las siguientes ecuaciones exponenciales en forma logarítmica.

Forma exponencial	**Forma logarítmica**	**Forma exponencial**	**Forma logarítmica**
10. $5^4 = 625$		11. $3^2 = 9$	
12. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$		13. $4^{-2} = \frac{1}{16}$	
14. $10^4 = 10000$		15. a^y = x	

16. Compara la forma exponencial de una ecuación con la forma logarítmica de una ecuación. ¿Qué parte de la ecuación exponencial es la **respuesta** a la ecuación logarítmica?

Tema: Considerar valores de funciones logarítmicas

Responde las siguientes preguntas. Si contestas con un sí, da un ejemplo de la respuesta. Si contestas con un no, explica porqué no.

17. ¿Es posible que un logaritmo sea igual a un número negativo?

18. ¿Es posible que un logaritmo sea igual a cero?

19. ¿Tiene $log_x 0$ una respuesta?

20. ¿Tiene $log_x 1$ una respuesta?

21. ¿Tiene $log_x x^5$ una respuesta?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

RENDIMIENTO

Tema: Revisión de propiedades de exponentes

Escribe cada expresión como un entero o una fracción simple.

22. 27^0

23. $11(-6)^0$

24. -3^{-2}

25. 4^{-3}

26. $\frac{9}{2^{-1}}$

27. $\frac{4^3}{8^0}$

28. $3\left(\frac{29^3}{11^5}\right)^0$

29. $\frac{3}{6^{-1}}$

30. $\frac{32^{-1}}{4^{-1}}$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

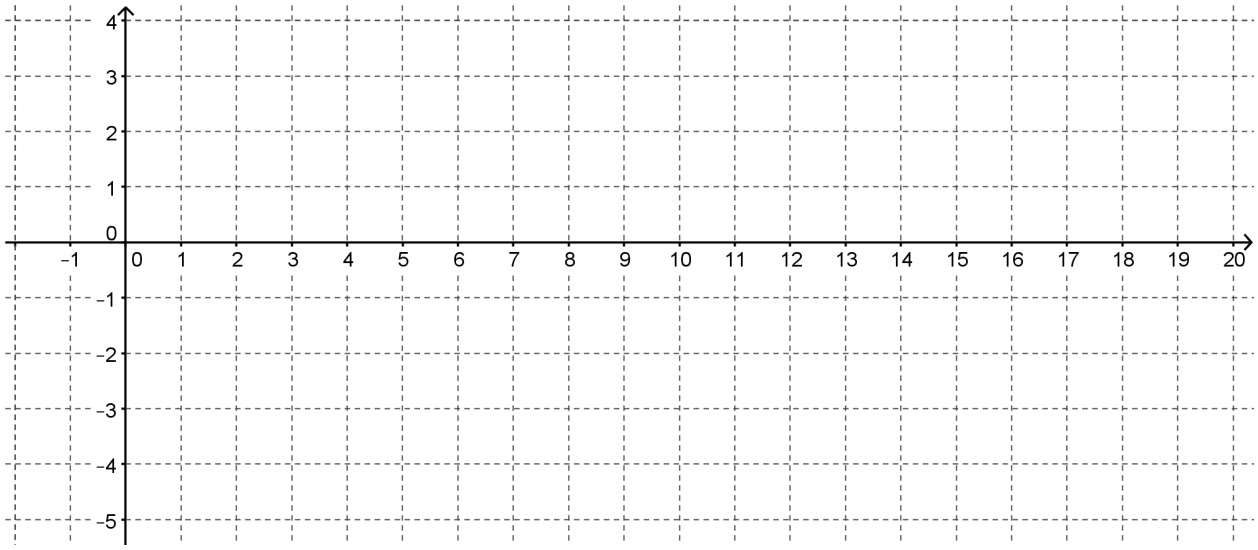
2.2 Cayéndose de un Logaritmo

Actividad para Consolidar Comprensión

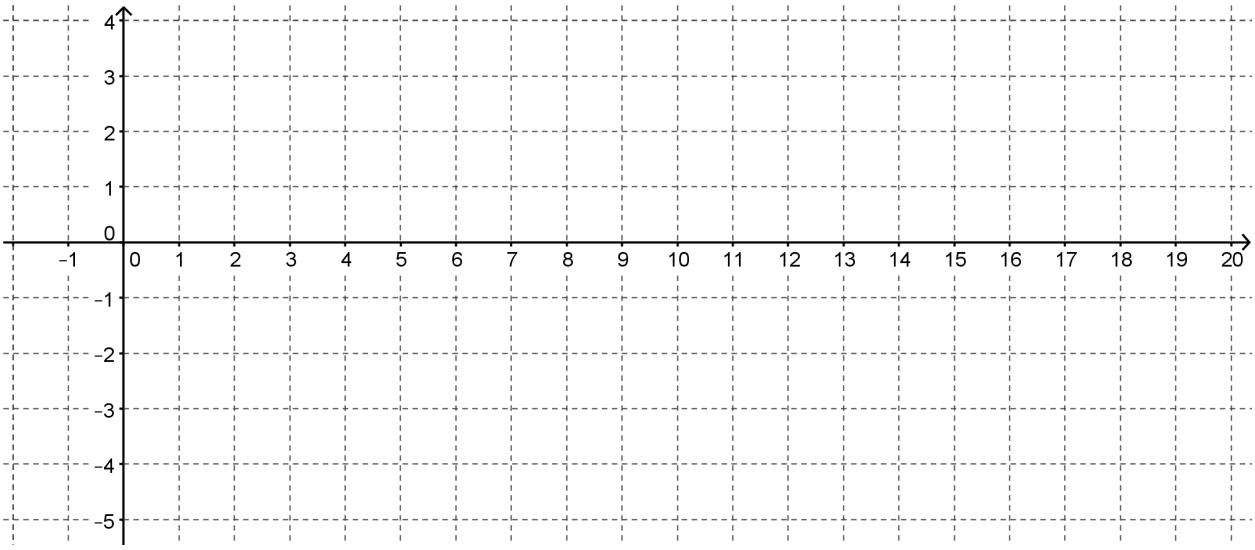
CC BY Ruth Hartnup
https://flic.kr/p/35Lhxq

1. Construye una tabla de valores y una gráfica para cada una de las siguientes funciones. Asegúrate de seleccionar al menos dos valores en el intervalo $0 < x < 1$.

a) $f(x) = \log_2 x$

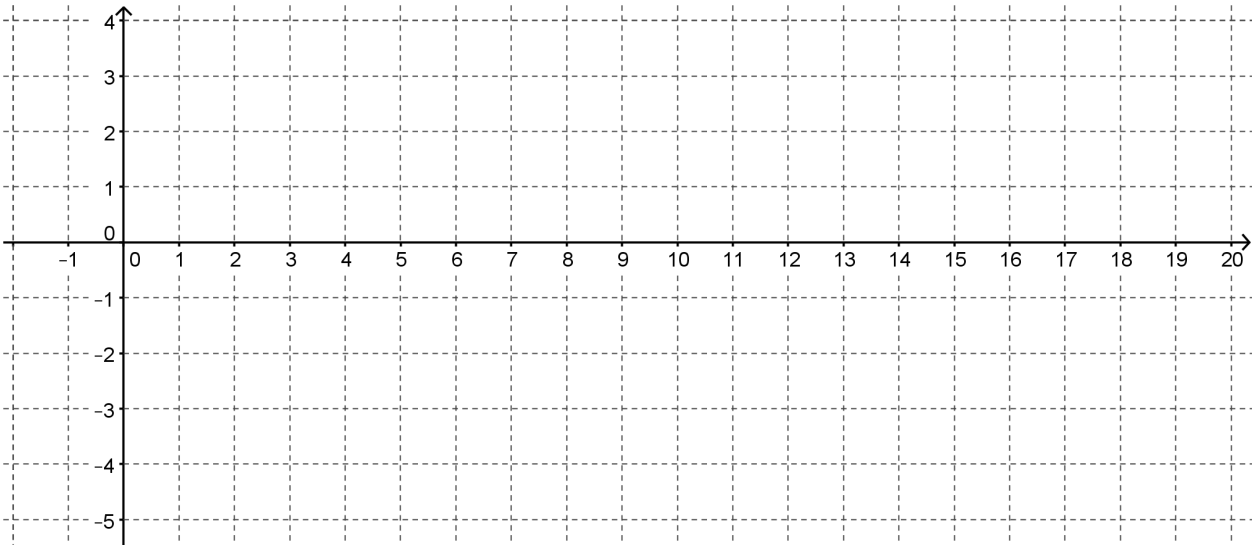


b) $g(x) = \log_3 x$

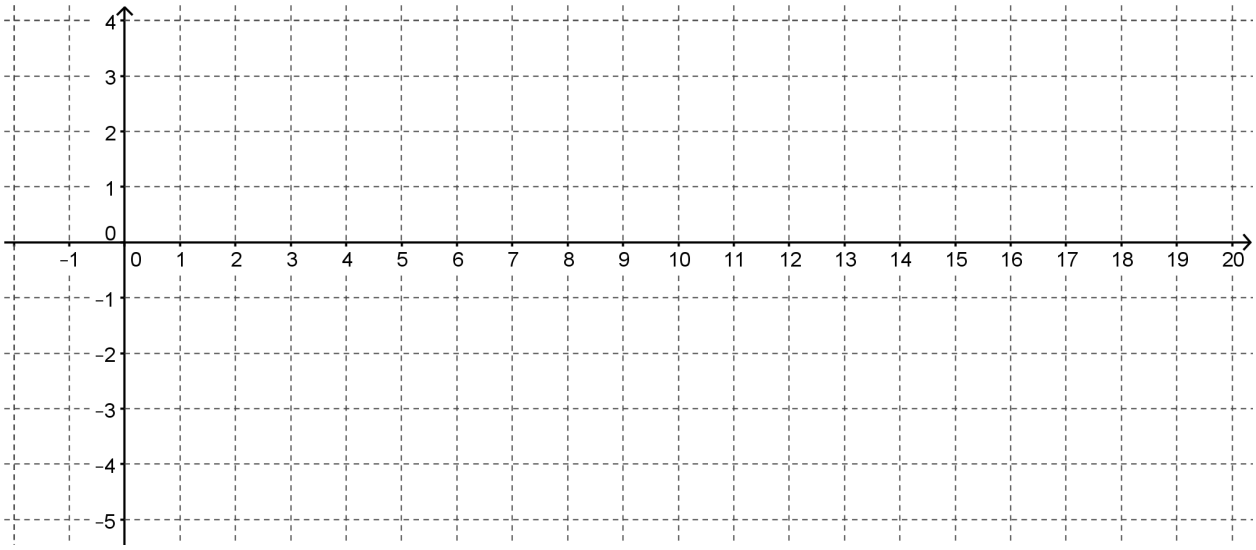


Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

c) $h(x) = \log_4 x$



d) $k(x) = \log_{10} x$



2. ¿Cómo decidiste qué valores usar para x en la tabla?

3. ¿Cómo usaste los valores de x para encontrar los valores de y en la tabla?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

4. ¿Qué similitudes ves en las gráficas?

5. ¿Qué diferencias observas en las gráficas?

6. ¿Cuál es el efecto al cambiar la base en la gráfica de una función logarítmica?

Vamos a centrarnos ahora en $k(x) = \log_{10} x$ para que podamos usar la tecnología para observar los efectos del cambio de parámetros en la función. **Debido a que la base 10 es una base comúnmente utilizada para funciones exponenciales y logarítmicas, a menudo se abrevia y escribe sin la base, así: $\boldsymbol{k(x) = \log x}$.**

7. Usa la tecnología para graficar $y = \log x$. ¿Cómo se compara esta gráfica con la gráfica que tu hiciste?

8. ¿Cómo pronosticas que la gráfica de $y = a + \log x$ será diferente a la gráfica de $y = \log x$?

9. Pon a prueba tu predicción graficando $y = a + \log x$ para varios valores de a. ¿Cuál es el efecto de a en la gráfica? Haz un argumento general de por qué esto sería cierto para todas las funciones logarítmicas.

10. ¿Cómo pronosticas que la gráfica de $y = \log(x + b)$ será diferente a la gráfica de $y = \log x$?

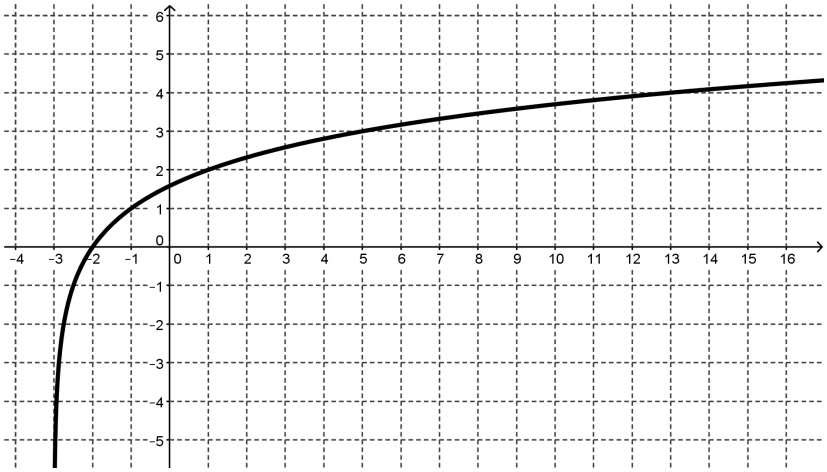
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

11. Pon a prueba tu predicción graficando $y = \log(x + b)$ para varios valores de b.
    - ¿Cuál es el efecto al sumar b?
    - ¿Cuál es el efecto al restar b (o sumar un número negativo)?

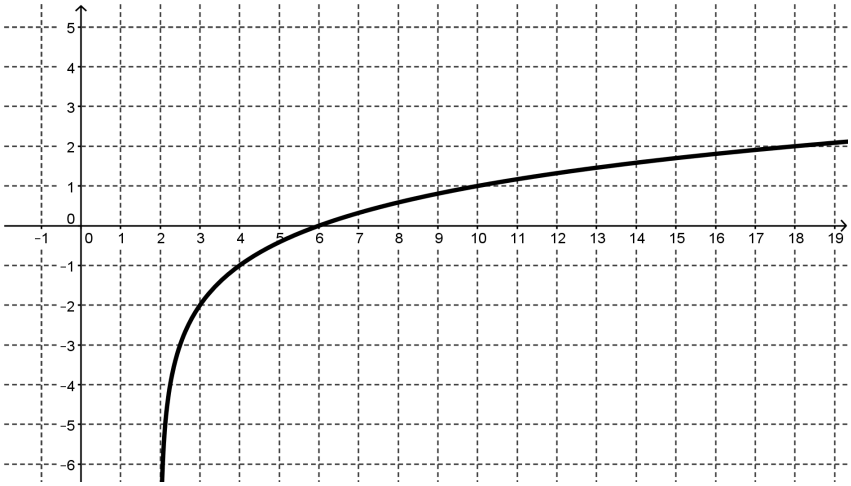
12. Haz un argumento general de por qué esto sería cierto para todas las funciones logarítmicas.

13. Escribe una ecuación para cada una de las siguientes funciones que son transformaciones de $f(x) = \log_2 x$.

a)



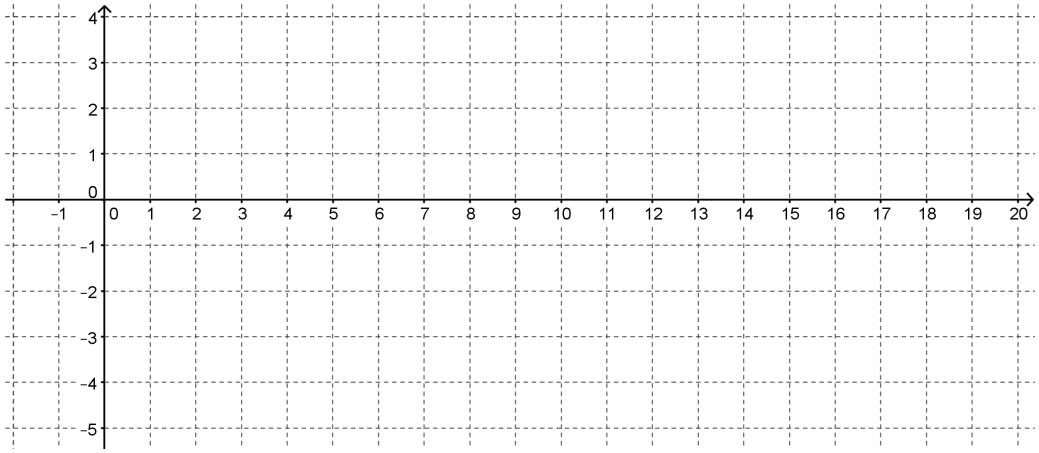
b)



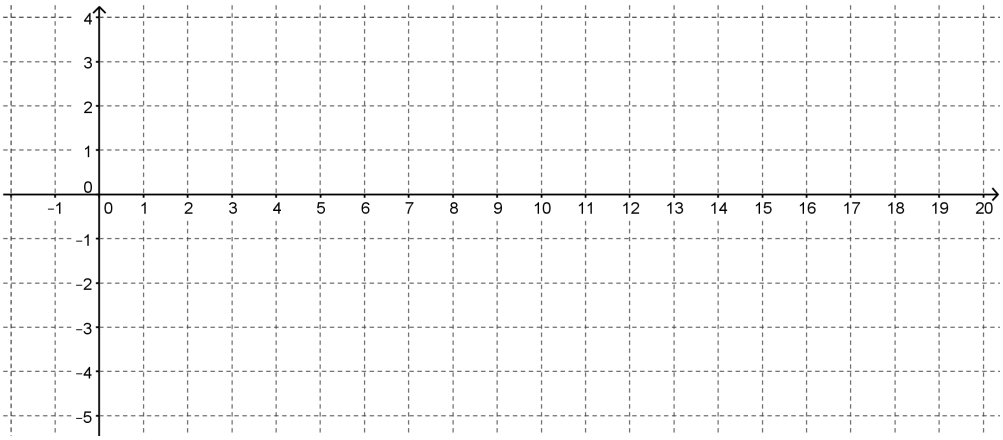
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0

14. Grafica y etiqueta cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2 + \log_2(x - 1)$



b) $g(x) = -1 + \log_2(x + 2)$



15. Compara la transformación de las gráficas de funciones logarítmicas con la transformación de las gráficas de funciones cuadráticas.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

Tema: Resolver ecuaciones logarítmicas simples

Encuentra la respuesta a cada ecuación logarítmica. Luego, explica cómo cada ecuación apoya la afirmación: *"La respuesta a una ecuación logarítmica es siempre el exponente".*

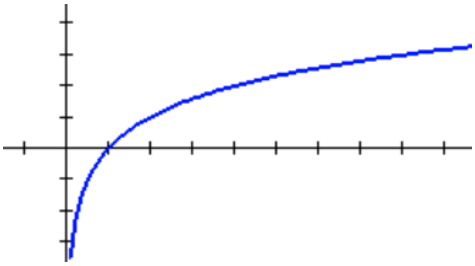
1. $log_5 625 =$
2. $log_3 243 =$
3. $log_5 0.2 =$
4. $log_9 81 =$
5. $log 1{,}000{,}000 =$
6. $log_x x^7 =$

PRÁCTICA

Tema: Explorar transformaciones en funciones logarítmicas

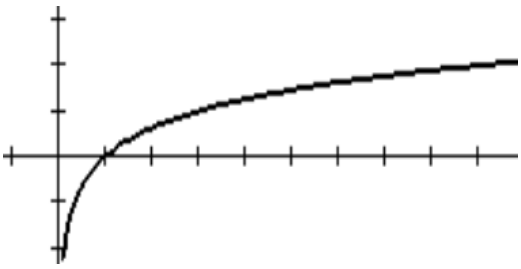
Responde las preguntas sobre cada gráfica.

7.



a. ¿Cuál es el valor de x cuando $f(x) = 0$?
b. ¿Cuál es el valor de x cuando $f(x) = 1$?
c. ¿Cuál es el valor de f (x) cuando $x = 2$?
d. ¿Cuál será el valor de x cuando $f(x) = 4$?
e. ¿Cuál es la ecuación de esta gráfica?

8.

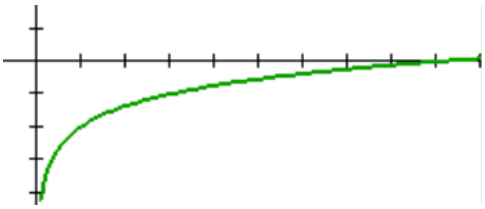


a. ¿Cuál es el valor de x cuando $f(x) = 0$?
b. ¿Cuál es el valor de x cuando $f(x) = 1$?
c. ¿Cuál es el valor de $f(x)$ cuando x = 9?
d. ¿Cuál será el valor de x cuando $f(x) = 4$?
e. ¿Cuál es la ecuación de esta gráfica?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

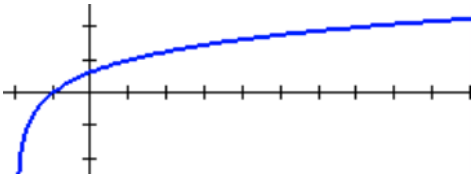
FUNCIONES LOGARÍTMICAS – 2.2

9. Usa la gráfica y la tabla de valores de la gráfica para escribir la ecuación de la gráfica. Explica qué números de la tabla te ayudaron más para escribir la ecuación.



X	Y1
1	-2
2	-1.369
3	-1
5	-.535
7	-.2288
9	0

10. Usa la gráfica y la tabla de valores de la gráfica para escribir la ecuación de la gráfica.
Explica qué números de la tabla te ayudaron más para escribir la ecuación.



X	Y1
-2	ERROR
-1	0
0	.63093
1	1
5	1.7712
6	1.8928
7	2

RENDIMIENTO

Tema: Uso de la regla de potencia a potencia con exponentes

Simplifica cada expresión. Las respuestas deben tener sólo exponentes positivos.

11. $(2^3)^4$
12. $(x^3)^2$
13. $(a^3)^{-2}$
14. $(2^3w)^4$
15. $(b^{-7})^3$
16. $(d^{-3})^{-2}$
17. $x^2 \cdot (x^5)^2$
18. $m^{-3} \cdot (m^2)^3$
19. $(x^5)^{-4} \cdot x^{25}$
20. $(5a^3)^2$
21. $(6^{-3})^2$
22. $(2a^3b^2)^2$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.3 Cortar Logaritmos

Actividad para Consolidar Comprensión

CC BY Ruth Hartnup
https://flic.kr/p/35Lhxq

¡Abe y Mary estaban trabajando juntas en su tarea de matemáticas cuando Abe tuvo una idea brillante!

Abe: Estaba mirando esta función de logaritmo que graficamos en *Cayéndose de un Logaritmo:*

$$y = \log_2(x + b).$$

Empecé a pensar que tal vez podría simplemente "distribuir" el logaritmo para obtener:

$$y = \log_2 x + \log_2 b.$$

Supongo que estoy diciendo que creo que estas son expresiones equivalentes, así que podría escribirlo de esta manera:

$$\log_2(x + b) = \log_2 x + \log_2 b$$

Mary: No sé de eso. Los logaritmos son complicados y no creo que realmente estés haciendo lo mismo aquí, que cuando distribuyes un número.

1. ¿Qué piensas? ¿Cómo puedes verificar si la idea de Abe funciona?

2. Si la idea de Abe funciona, da algunos ejemplos que ilustren por qué funciona. Si la idea de Abe no funciona, da un contraejemplo.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Abe: Solo sé que está pasando algo con estos logaritmos. Acabo de graficar $f(x) = \log_2(4x)$. Aquí está:

Es extraño porque creo que esta gráfica es solo una traslación de $y = \log_2 x$. ¿Es posible que la ecuación de esta gráfica se escriba en más de una forma?

3. ¿Cómo responderías a la pregunta de Abe? ¿Hay condiciones que podrían permitir que la misma gráfica tenga diferentes ecuaciones?

Mary: Cuando dices, "una traslación de $y = \log_2 x$" quieres decir que es solo un cambio vertical u horizontal? ¿Cuál podría ser esa ecuación?

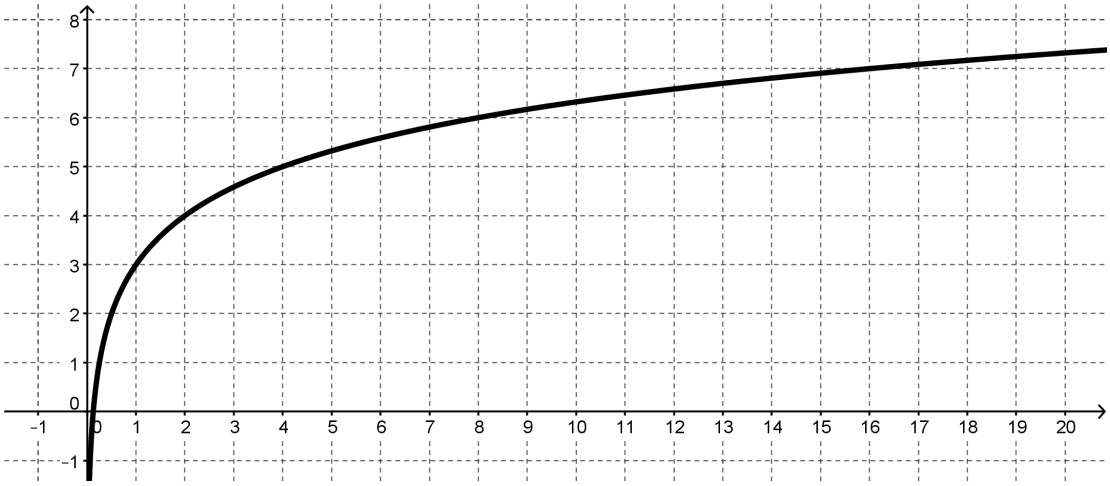
4. Encuentra una ecuación para $f(x)$ que muestre que es un cambio horizontal o vertical de $y = \log_2 x$.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

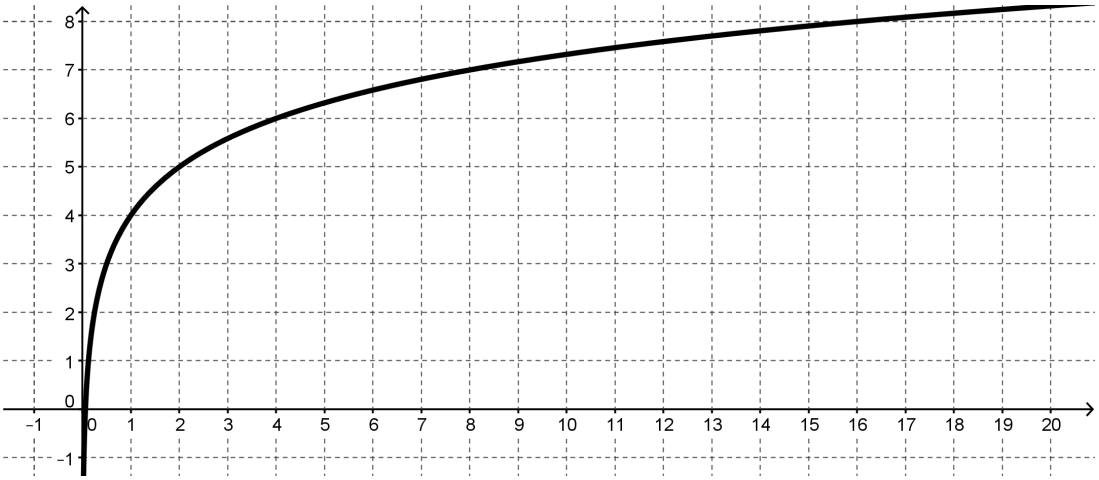
Mary: Me pregunto por qué el desplazamiento vertical resultó ser arriba 2 cuando x se multiplicó por 4. Me pregunto si tiene algo que ver con la potencia a la que se eleva la base, ya que esta es una función de *logaritmo*. Intentemos ver qué pasa con $y = \log_2(8x)$ y $y = \log_2(16x)$.

5. Intenta escribir una ecuación equivalente para cada una de estas gráficas que sea un desplazamiento vertical de $y = \log_2 x$.

a) $y = \log_2(8x)$ Ecuación equivalente: _____



b) $y = \log_2(16x)$ Ecuación equivalente: _____



Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Mary: ¡Oh! ¡Creo que sé lo que está sucediendo aquí! Esto es lo que vemos en las gráficas:

$$\log_2(4x) = 2 + \log_2 x$$

$$\log_2(8x) = 3 + \log_2 x$$

$$\log_2(16x) = 4 + \log_2 x$$

Aquí está la parte brillante: Sabemos que $\log_2 4 = 2, \log_2 8 = 3,$ y $\log_2 16 = 4$. Así que:

$$\log_2(4x) = \log_2 4 + \log_2 x$$

$$\log_2(8x) = \log_2 8 + \log_2 x$$

$$\log_2(16x) = \log_2 16 + \log_2 x$$

Creo que parece "distributivo" como lo que estabas tratando de hacer, pero como en realidad no puedes distribuir una función, en realidad es solo una regla de multiplicación de logaritmos. Creo que mi regla sería:

$$\log_2(ab) = \log_2 a + \log_2 b$$

6. ¿Cómo puedes expresar la regla de Mary en palabras?

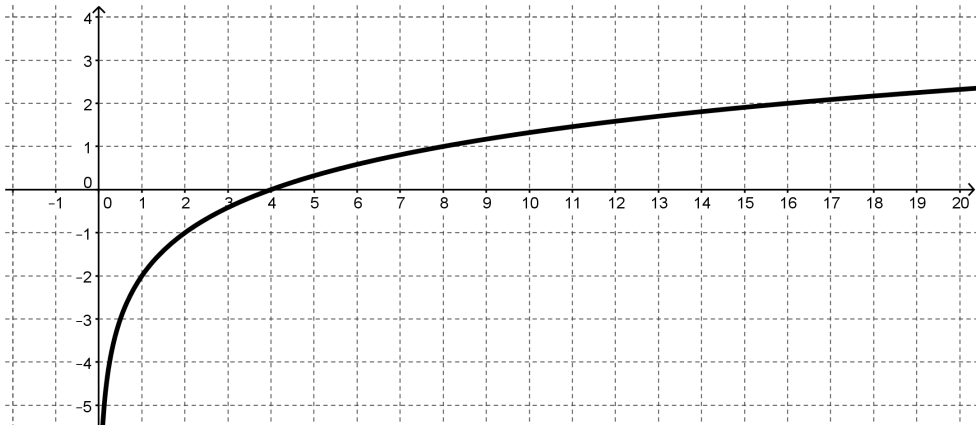
7. ¿Es verdadera esta afirmación? Si lo es, proporciona algunos ejemplos que ilustren por qué funciona. Si no es verdadero, proporciona un contraejemplo.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

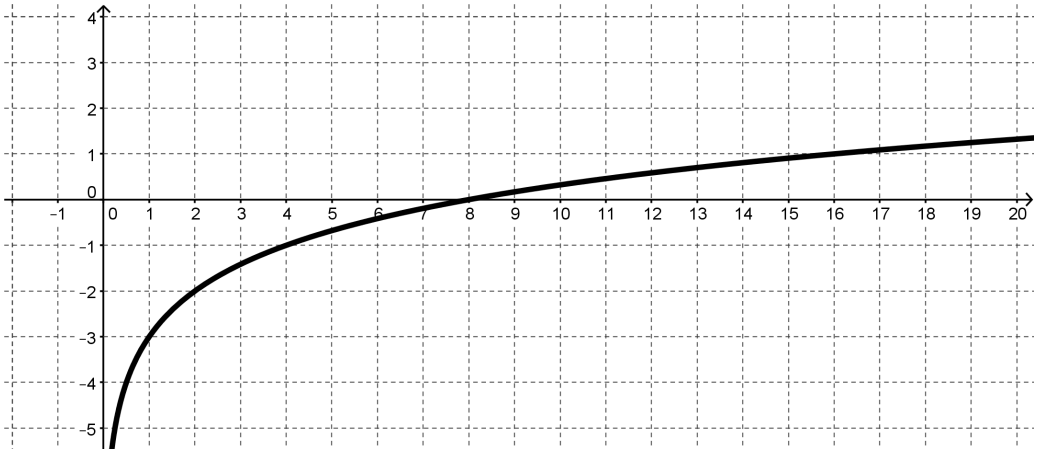
Mary: Entonces, me pregunto si algo similar sucede si hay división dentro del argumento de una función de logaritmo. Voy a probar algunos ejemplos. Si mi teoría funciona, entonces todas estas gráficas serán simplemente cambios verticales de $y = \log_2 x$.

8. Aquí están los ejemplos de Abe y sus gráficas. Prueba la teoría de Abe tratando de escribir una ecuación equivalente para cada una de estas gráficas que sea un desplazamiento vertical de $y = \log_2 x$.

a) $y = \log_2\left(\frac{x}{4}\right)$ Ecuación equivalente: _____



b) $y = \log_2\left(\frac{x}{8}\right)$ Ecuación equivalente: _____



9. Usa estos ejemplos para escribir una regla para división dentro del argumento de un *logaritmo* que sea como la regla que Mary escribió para la multiplicación dentro de un *logaritmo*.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

10. ¿Es verdadera esta afirmación? Si lo es, proporciona algunos ejemplos que ilustren por qué funciona. Si no es verdadera, proporciona un contraejemplo.

Abe: Definitivamente eres brillante por pensar en esa regla de multiplicación. Pero soy un genio porque he usado tu regla de multiplicación para llegar a una regla de poder. Digamos que comienzas con:

$$\log_2(x^3)$$

Realmente eso es lo mismo que tener: $\log_2(x \cdot x \cdot x)$

Entonces, podría usar tu regla de multiplicación y escribir: $\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x$

Noté que hay 3 términos que son todos iguales. Eso lo hace: $3 \log_2 x$

Entonces mi regla es: $\log_2(x^3) = 3 \log_2 x$

Si tu regla es verdadera, entonces he comprobado mi regla de poder.

Mary: No creo que sea realmente una regla de poder a menos que funcione para cualquier poder. Solo mostraste cómo podría funcionar para 3.

Abe: Está bien, voy a decir que puede ser cualquier número *x*, elevado a cualquier poder, *k*. Mi regla de poder es:

$$\log_2(x^k) = k \log_2 x$$

¿Estás satisfecha?

11. Proporciona un argumento sobre la regla de poder de Abe. ¿Es verdadera o no?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Abe: Antes de ganar el Premio Nobel de matemáticas, supongo que tenemos que pensar si estas reglas funcionan o no para cualquier base.

12. Las tres reglas, escritas para cualquier base $b > 1$ son:

    Regla del producto de un logaritmo: $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

    Regla del cociente de un logaritmo: $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

    Regla de poder de un logaritmo: $\log_b(x^k) = k\log_b x$

    Elabora un argumento sobre por qué estas reglas funcionarán en cualquier base $b > 1$ si funcionan para la base 2.

13. ¿Cómo son estas reglas similares a las reglas para los exponentes? ¿Por qué los exponentes y los logaritmos tienen reglas similares?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

Tema: Recordar exponentes fraccionarios

Escribe lo siguiente con un exponente. Simplifica cuando sea posible.

1. $\sqrt[5]{x}$
2. $\sqrt[7]{s^2}$
3. $\sqrt[3]{w^8}$
4. $\sqrt[3]{8r^6}$
5. $\sqrt[5]{125m^5}$
6. $\sqrt[3]{(8x)^2}$
7. $\sqrt[3]{9b^8}$
8. $\sqrt{75x^6}$

Reescribe con un exponente fraccional. Luego encuentra la respuesta.

9. $log_3\sqrt[5]{3} =$
10. $log_2\sqrt[3]{4} =$
11. $log_7\sqrt[5]{343} =$
12. $log_5\sqrt[5]{3125} =$

PRÁCTICA

Tema: Uso de las propiedades de logaritmos para expandir expresiones logarítmicas

Usa las propiedades de los logaritmos para expandir la expresión como una suma o diferencia, y / o como un múltiplo constante de logaritmos. (Supón que todas las variables son positivas).

13. $log_5 7x$
14. $log_5 10a$
15. $log_5 \frac{5}{b}$
16. $log_5 \frac{d}{4}$
17. $log_6 x^3$
18. $log_5 9x^2$
19. $log_2 (7x)^4$
20. $log_3 \sqrt{w}$
21. $log_5 \frac{xyz}{w}$
22. $log_5 \frac{9\sqrt{x}}{y^3}$
23. $log_2 \left(\frac{x^2-4}{x^3}\right)$
24. $log_2 \left(\frac{x^2}{y^5w^3}\right)$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

RENDIMIENTO

Tema: Escribir expresiones en forma exponencial y forma logarítmica

Convertir a forma logarítmica.

25. $2^9 = 512$

26. $10^{-2} = 0.01$

27. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

Escribir en forma exponencial.

28. $log_4 2 = \frac{1}{2}$

29. $log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

30. $log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125} = 3$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.4 Aritmética de Logaritmos

Actividad para Practicar Comprensión

CC BY Tambako the Jaguar
https://flic.kr/p/6t9FaH

Abe y Mary se sienten bien con sus reglas de logaritmos y presumen su destreza matemática a todos sus amigos.

Stephen: Supongo que piensas que eres muy inteligente porque descubriste algunas reglas de logaritmos, pero quiero saber para qué sirven.

Abe: Bueno, hemos visto muchas veces cuando las expresiones equivalentes son útiles. A veces, cuando escribes una expresión con una variable de una manera diferente, significa algo diferente.

1. ¿Cuáles son algunos ejemplos de tu experiencia previa, donde las expresiones equivalentes fueron útiles?

Mary: Estaba pensando en la tarea *Lógica de Logaritmos* en la que intentamos estimar y ordenar ciertos valores de *logaritmos*. Me preguntaba si podríamos usar nuestras reglas de logaritmos para tomar los valores que conocemos y usarlos para encontrar valores que no conocemos.

Por ejemplo: Supongamos que quieres calcular $\log_2 6$. Si sabes lo que son $\log_2 2$ y $\log_2 3$ entonces puedes usar la regla del producto y decir: $\log_2(2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3$

Stephen: Eso es genial. Todos saben que $\log_2 2 = 1$, ¿pero que es $\log_2 3$?

Abe: Oh, vi esto en alguna parte. $\log_2 3 = 1.585$. Entonces la idea de Mary realmente funciona. Tu dices:

$$\log_2(2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3$$

$$= 1 + 1.585$$

$$= 2.585$$

$$\log_2 6 = 2.585$$

2. De acuerdo con lo que sabes acerca de los logaritmos, explica por qué 2.585 es un valor razonable para $\log_2 6$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Stephen: ¡Oh, oh! Tengo uno. Puedo entender $\log_2 5$ así:

$$\log_2(2+3) = \log_2 2 + \log_2 3$$

$$= 1 + 1.585$$

$$= 2.585$$

$$\log_2 5 = 2.585$$

3. ¿Pueden Stephen y Mary estar en lo correcto? Explica quién tiene razón, quién está equivocado (si hay alguien) y por qué.

Ahora puedes intentar aplicar las reglas de logaritmos tu mismo. Utiliza los valores que se te dan y los que conoces por definición, como $\log_2 2 = 1$, para encontrar cada uno de los siguientes valores. Explica lo que hiciste en el espacio debajo de cada pregunta.

$\log_2 3 = 1.585$ $\log_2 5 = 2.322$ $\log_2 7 = 2.807$

Las tres reglas, escritas para cualquier base $b > 1$ son:

Regla del producto de un logaritmo: $\boldsymbol{\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y}$

Regla del cociente de un logaritmo: $\boldsymbol{\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y}$

Regla de poder de un logaritmo: $\boldsymbol{\log_b(x^k) = k\log_b x}$

4. $\log_2 9 =$ _____

5. $\log_2 10 =$ _____

6. $\log_2 12 =$ _____

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

7. $\log_2\left(\frac{7}{3}\right) =$ _____

8. $\log_2\left(\frac{30}{7}\right) =$ _____

9. $\log_2 486 =$ _____

10. Dado el trabajo que acabas de hacer, ¿qué otros valores necesitarías para calcular el valor del logaritmo de base 2 para cualquier número?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

A veces, pensar en expresiones equivalentes con logaritmos puede ser complicado. Considera cada una de las siguientes expresiones y decide si son siempre verdaderas para los números en el dominio de la función logarítmica, a veces verdaderas o nunca verdaderas. Explica tus respuestas. Si respondes "a veces verdaderas", describe las condiciones que deben estar vigentes para que la afirmación sea verdadera.

11. $\log_4 5 - \log_4 x = \log_4 \left(\frac{5}{x}\right)$ _____

12. $\log 3 - \log x - \log x = \log \left(\frac{3}{x^2}\right)$ _____

13. $\log x - \log 5 = \frac{\log x}{\log 5}$ _____

14. $5 \log x = \log x^5$ _____

15. $2 \log x + \log 5 = \log(x^2 + 5)$ _____

16. $\frac{1}{2} \log x = \log \sqrt{x}$ _____

17. $\log(x - 5) = \frac{\log x}{\log 5}$ _____

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

Tema: Resolver ecuaciones exponenciales simples y ecuaciones logarítmicas

Has resuelto ecuaciones exponenciales antes basadas en la idea de que $\boldsymbol{a^x = a^y}$, sí ***y solo sí*** $\boldsymbol{x = y}$.

Puedes usar la misma lógica en ecuaciones logarítmicas. $\boldsymbol{log_a x = log_a y}$, ***sí y solo sí*** $\boldsymbol{x = y}$.

Reescribe cada ecuación para establecer que todas las partes correspondan la una a la otra. Entonces resuelve x.

Ejemplo: ecuación original	***Ecuación reescrita:***	***Solución:***
a.) $3^x = 81$	$3^x = 3^4$	$x = 4$
b.) $log_2 x - log_2 5 = 0$	$log_2 x = log_2 5$	$x = 5$

1. $3^{x+4} = 243$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

3. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{27}{64}$

4. $log_2 x - log_2 13 = 0$

5. $log_2(2x - 4) - log_2 8 = 0$

6. $log_2(x + 2) - log_2 9x = 0$

7. $\frac{log\ 2x}{log\ 14} = 1$

8. $\frac{log(5x-1)}{log\ 29} = 1$

9. $\frac{log\ 5^{(x-2)}}{log\ 625} = 1$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PRÁCTICA

Tema: Reescritura de logaritmos en términos de logaritmos conocidos

Usa las propiedades de los logaritmos para reescribir los logaritmos indicados en términos de los valores dados, luego encuentra el logaritmo indicado usando una calculadora.

No utilices una calculadora para evaluar los logaritmos.

Dado: $\boldsymbol{log\,16 \approx 1.2}$
$\boldsymbol{log\,5 \approx 0.7}$
$\boldsymbol{log\,8 \approx 0.9}$

10. Encuentra $log\frac{5}{8}$

11. Encuentra $log\,25$

12. Encuentra $log\frac{1}{2}$

13. Encuentra $log\,80$

14. Encuentra $log\frac{1}{64}$

Dado $\boldsymbol{log_3 2 \approx 0.6}$
$\boldsymbol{log_3 5 \approx 1.5}$

15. Encuentra $log_3 16$

16. Encuentra $log_3 108$

17. Encuentra $log_3\frac{3}{50}$

18. Encuentra $log_3\frac{8}{15}$

19. Encuentra $log_3 486$

20. Encuentra $log_3 18$

21. Encuentra $log_3 120$

22. Encuentra $log_3\frac{32}{45}$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

RENDIMIENTO

Tema: Usar la definición de logaritmo para resolver x

Usa tu calculadora y la definición de log x (recuerda que la base es 10) para encontrar el valor de x. (Redondea tus respuestas a 4 decimales).

23. $log\ \mathrm{x} = -3$

24. $log\ \mathrm{x} = 1$

25. $log\ \mathrm{x} = 0$

26. $log\ \mathrm{x} = \frac{1}{2}$

27. $log\ \mathrm{x} = 1.75$

28. $log\ \mathrm{x} = -2.2$

29. $log\ \mathrm{x} = 3.67$

30. $log\ \mathrm{x} = \frac{3}{4}$

31. $log\ \mathrm{x} = 6$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.5 Dieces Poderosos

Actividad para Practicar Comprensión

CC BY Eli Christman
https://flic.kr/p/avCdHc

Rompecabezas de Tablas

1. Encuentra los valores perdidos de *x* en las tablas:

a.

x	$y = 10^x$
-2	$\frac{1}{100}$
1	10
	50
	100
3	1000

b.

x	$y = 3(10^x)$
	0.3
0	3
	94.87
2	300
	1503.56

c. ¿Qué ecuaciones podrían escribirse, en términos de *x* solamente, para cada uno de los espacios en los que falta la *x* en las dos tablas de arriba?

d.

x	$y = \log x$
0.01	-2
	-1
10	1
	1.6
100	2

e.

x	$y = \log(x+3)$
	-2
-2.9	-1
	0.3
7	1
	3

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

f. ¿Qué ecuaciones podrían escribirse, en términos de x solamente, para cada uno de los espacios en los que falta la x en las dos tablas de arriba?

2. ¿Qué estrategia usaste para encontrar las soluciones a las ecuaciones generadas por las tablas que contenían funciones exponenciales?

3. ¿Qué estrategia usaste para encontrar las soluciones a las ecuaciones generadas por las tablas que contenían funciones logarítmicas?

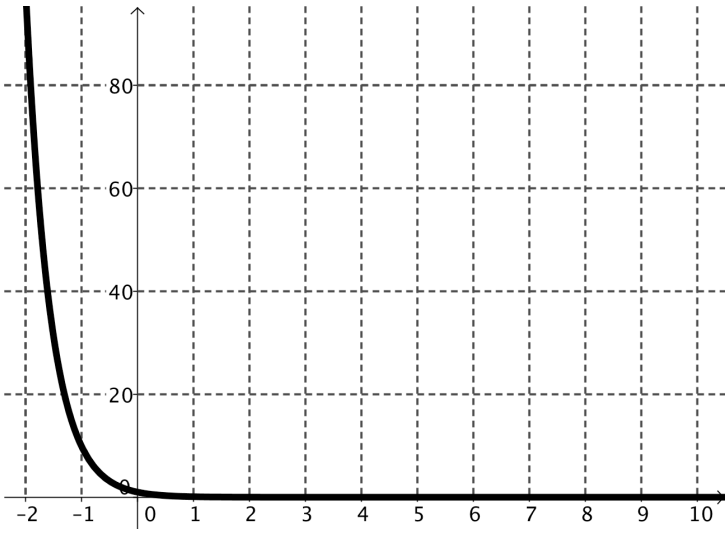
Rompecabezas de Gráficas

4. La gráfica de $y = 10^{-x}$ se da al calce. Usa la gráfica para resolver x en las ecuaciones y etiqueta las soluciones.

a. $40 = 10^{-x}$
x = ____
Etiqueta la solución con una A en la gráfica.

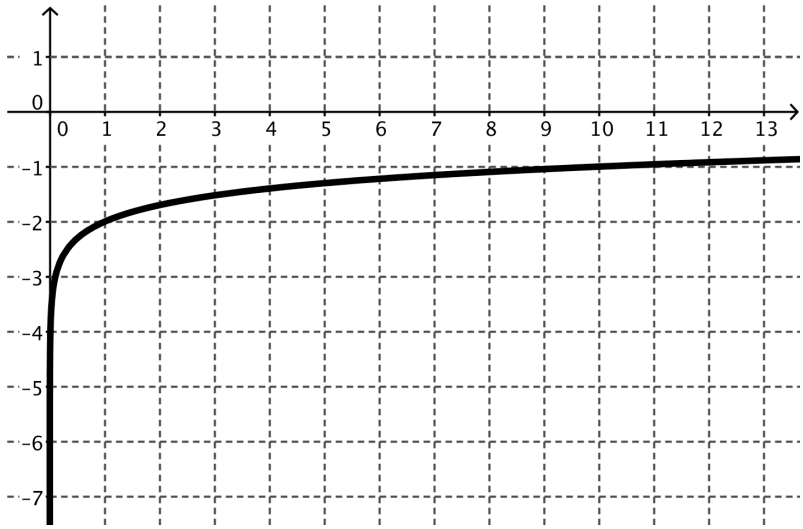
b. $10^{-x} = 10$
x = ____
Etiqueta la solución con una B en la gráfica.

c. $10^{-x} = 0.1$
x = ____
Etiqueta la solución con una C en la gráfica.



Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

5. La gráfica de $y = -2 + \log x$ se da al calce. Usa la gráfica para resolver x en las ecuaciones y etiqueta las soluciones.



$-2 + \log x = -2$

x = ____
Etiqueta la solución con una A en la gráfica.

a. $-2 + \log x = 0$
x = ____
Etiqueta la solución con una B en la gráfica.

c. $-4 = -2 + \log x$
x = ____
Etiqueta la solución con una C en la gráfica.

d. $-1.3 = -2 + \log x$
x = ____
Etiqueta la solución con una D en la gráfica.

e. $1 = -2 + \log x$
x = ____

6. ¿Las soluciones que encontraste en el #5 son exactas o aproximadas? ¿Por qué?

Rompecabezas de Ecuaciones

Resuelve x en cada ecuación.

7. 10^x=10,000

8. $125 = 10^x$

9. $10^{x+2} = 347$

10. $5(10^{x+2}) = 0.25$

11. $10^{-x-1} = \frac{1}{36}$

12. $-(10^{x+2}) = 16$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

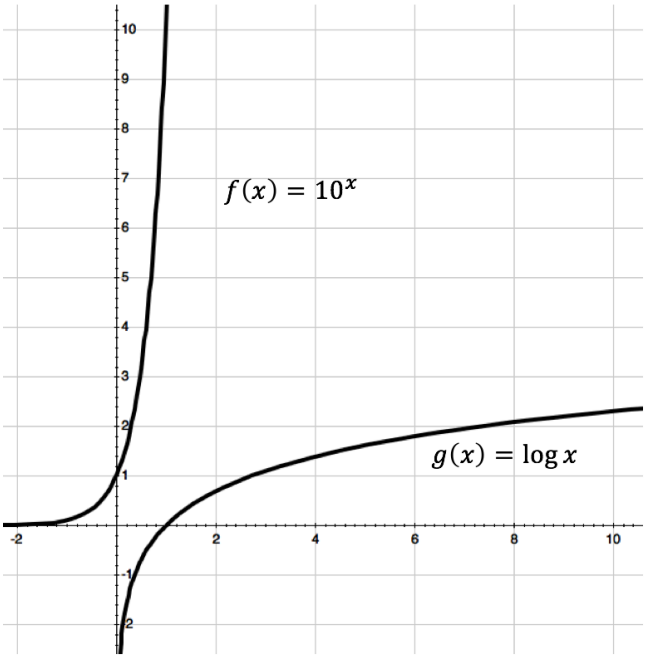
Tema: Comparación de las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica.

Las gráficas de $f(x) = 10^x$ y $g(x) = log\, x$ se muestran en el mismo plano de coordenadas.

Haz una lista de las características de cada función.

1. $f(x) = 10^x$

2. $g(x) = log\, x$



Cada pregunta a continuación se refiere a las gráficas de las funciones $f(x) = 10^x$ y $g(x) = log\, x$. Indica si son verdaderas o falsas. Si son falsas, corrige la declaración para que sea verdadera.

_____ 3. Cada gráfica de la forma $g(x) = log\, x$ contendrá el punto (1, 0).

_____ 4. Ambas gráficas tienen asíntotas verticales.

_____ 5. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tienen la misma tasa de cambio.

_____ 6. Las funciones son inversas entre sí.

_____ 7. El rango de $f(x)$ es el dominio de $g(x)$.

_____ 8. La gráfica de $g(x)$ nunca llegará a 3.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PRÁCTICA

Tema: Resolver ecuaciones logarítmicas (base 10) tomando el registro de cada lado.

Evaluar los siguientes logaritmos.

9. $log\,10$
10. $log\,10^{-7}$
11. $log\,10^{75}$
12. $log\,10^{x}$
13. $log_3 3^5$
14. $log_8 8^{-3}$
15. $log_{11} 11^{37}$
16. $log_m m^n$

Puedes usar esta propiedad de logaritmos para ayudarte a resolver ecuaciones logarítmicas.

* *Nota: esta propiedad solo funciona cuando la base del logaritmo coincide con la base del exponente.*

Resuelve las ecuaciones insertando log en ambos lados de la ecuación. (Necesitarás una calculadora).

17. $10^n = 4.305$
18. $10^n = 0.316$
19. $10^n = 14{,}521$
20. $10^n = 483.059$

RENDIMIENTO

Tema: Resolución de ecuaciones con interés compuesto.

Fórmula para el interés compuesto: Si se depositan *P* dólares en una cuenta que paga una tasa de interés anual *r* compuesto (pagado) *n* veces por año, la cuenta tendrá
$\mathbf{A} = \boldsymbol{P}\left(\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{nt}}$ dólares después de *t* años.

21. ¿Cuánto dinero habrá en una cuenta al final de 10 años si se depositan $3000 al 6%? Interés anual compuesto de la siguiente manera: (Supón que no se realizan retiros).
    a.) Anualmente
    b.) Semestralmente
    c.) Trimestralmente
    d.) Diariamente (Usa *n* = 365.)

22. Encuentra la cantidad de dinero en una cuenta después de 12 años si se depositan $5,000 al 7.5% anual. Interés anual compuesto de la siguiente manera: (Supón que no se realizan retiros).
    a.) Anualmente
    b.) Semestralmente
    c.) Trimestralmente
    d.) Diariamente (Usa *n* = 365).

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.6H Problema de Interés Compuesto

Actividad para Desarrollar Comprensión

CC BY Miran Rijavec
https://flic.kr/p/9PSLHY

Parte I: Como un joven matemático emprendedor, sabes que tu conocimiento superior de las matemáticas te ayudará a tomar mejores decisiones sobre todo tipo de cosas en tu vida. Un área importante es el dinero $$$. Entonces, has estado contemplando el mundo y preguntándote cómo podrías maximizar el dinero que ganas en tu cuenta de ahorros.

Eres joven y aún no has ahorrado mucho dinero. De hecho, solo tienes $ 100, pero realmente quieres aprovecharlo al máximo. Te gusta la idea del interés compuesto, lo que significa que el banco te paga intereses sobre todo el dinero en tu cuenta de ahorros, incluido el interés que te hayan pagado previamente. Esto parece un muy buen trato. Incluso recuerdas que la fórmula del interés compuesto es exponencial. Veamos, es:

$$A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

Donde A = es la cantidad de dinero en cualquier en cualquier tiempo, t

P = capital inicial o el monto original invertido en la cuenta

r = la tasa de interés anual

n = el número de períodos de capitalización cada año

t = la cantidad de años

Si tu cuenta de ahorros paga un generoso 5% por año y se reinvierte una vez al año, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta al final de un año?

1. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al final de 20 años?

Parece que cuantos más períodos de capitalización haya en el año, más dinero harás. La pregunta es, ¿hace una gran diferencia?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2. Compara la cantidad de dinero que tendrías después de 20 años si se reinvierte dos veces al año (semestral), 4 veces al año (trimestral), 12 veces al año (mensual), 365 veces al año (diariamente), y luego cada hora. Encuentra una forma de organizar, mostrar y explicar tus resultados a tu clase.

Resulta que el valor que encontraste en tu problema de composición es 100 veces un número irracional muy famoso, llamado *e*. Como *e* es irracional, es un número decimal no terminal y no repetitivo, como π. Los primeros dígitos de *e* son 2.71828182845904523536028747135 27. Al igual que π, *e* es un número en matemáticas que se ocupa en muchas situaciones del mundo real, incluido el crecimiento exponencial. Una de las fórmulas que usa *e* resulta lo que acabas de practicar sobre el interés compuesto. Se puede demostrar que la cantidad de dinero A, en una cuenta de ahorros donde el dinero se reinvierte continuamente está dada por:

$$A = Pe^{rt}$$

P = capital inicial o el monto original invertido en la cuenta

r = la tasa de interés anual

t = la cantidad de años

3. Es bastante típico que las cuentas de ahorro se capitalicen mensualmente. Compara la cantidad de dinero en dos cuentas de ahorro después de 10 años con la misma inversión inicial de $ 500 y una tasa de interés del 3% en cada cuenta. La primera cuenta se capitaliza mensualmente y la segunda cuenta se capitaliza continuamente.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

4. Usa la tecnología para comparar las gráficas de las dos cuentas. ¿Qué conclusiones sacarías sobre el efecto de cambiar el número de períodos de capitalización en una cuenta de ahorros?

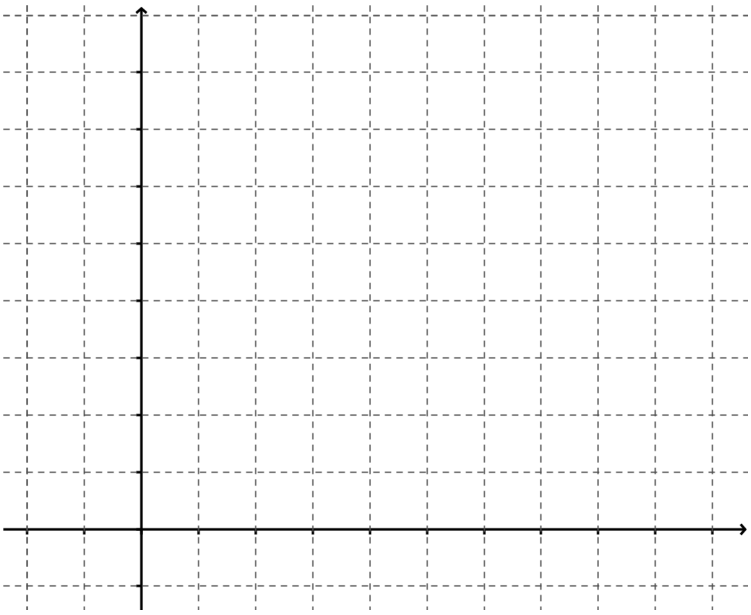
Parte II

Dado que *e* es ampliamente utilizado para modelar el crecimiento y el decrecimiento exponencial en muchos contextos, vamos a familiarizarnos un poco más con la función exponencial de base *e*:

$$f(x) = e^x$$

1. Haz una predicción sobre la gráfica de *f (x).* Explica qué conocimiento usaste para hacer tu predicción.

2. Crea una tabla y una gráfica y describe las características matemáticas de *f (x)*.



Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

Tema: Identificación de patrones lineales y cuadráticos mediante la examinación de las tasas de crecimiento.

Usa la primera y la segunda diferencia para identificar el patrón en las tablas como *lineal, cuadrático o ninguno.* **Escribe la ecuación recursiva para los patrones que son** *lineales o cuadráticos.*

1.

x	y
-3	-23
-2	-17
-1	-11
0	-5
1	1
2	7
3	13

a. modelo

b. ecuación recursiva

2.

x	y
-3	4
-2	0
-1	-2
0	-2
1	0
2	4
3	10

a. modelo

b. ecuación recursiva

3.

x	y
-3	-15
-2	-10
-1	-5
0	0
1	5
2	10
3	15

a. modelo

b. ecuación recursiva

4.

x	y
-3	24
-2	22
-1	20
0	18
1	16
2	14
3	12

a. modelo

b. ecuación recursiva

5.

x	y
-3	48
-2	22
-1	6
0	0
1	4
2	18
3	42

a. modelo

b. ecuación recursiva

6.

x	y
-3	4
-2	1
-1	0
0	1
1	4
2	9
3	16

a. modelo

b. ecuación recursiva

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PRÁCTICA

Tema: Interés compositivo continuo y base *e*.

Recuerda las ecuaciones para el interés compuesto que usaste en clase hoy:

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \quad y \quad A = Pe^{rt}$$

7. Calcula la cantidad de dinero en una cuenta después de 15 años si se depositan $7000 al 6% de interés anual compuesto de la siguiente manera:

   a) anualmente b) semestralmente c) trimestralmente

   d) diariamente (Usa n = 365) e) continuamente

8. ¿Cuánto dinero habrá en una cuenta al final de 34 años si se depositan $17,000 al 12% de interés anual compuesto de la siguiente manera?

   a) anualmente b) semestralmente c) trimestralmente

   d) diariamente (Usa n = 365) e) continuamente

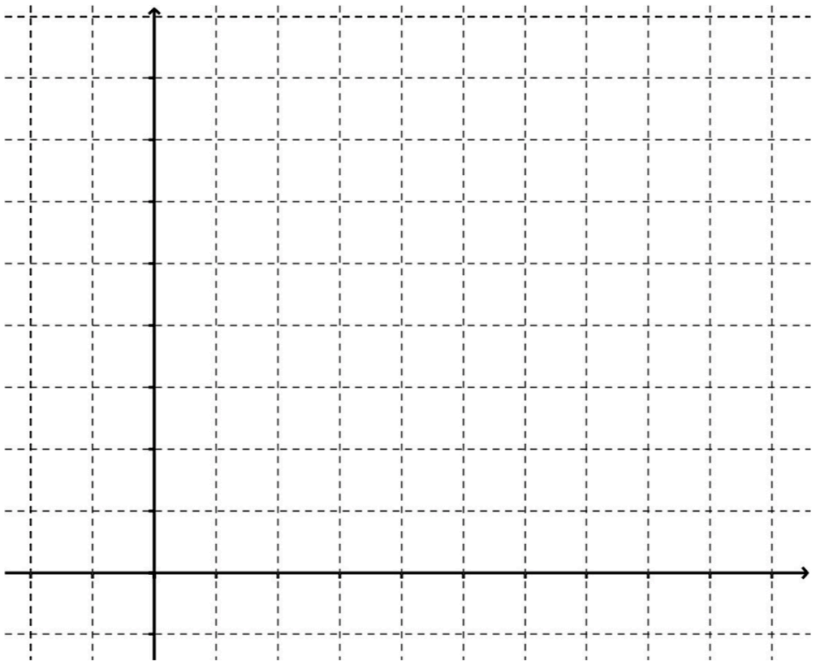
9. Completa la tabla para cada una de las funciones dadas. Luego grafica cada función en los mismos ejes.

a)

x	$f(x) = 2^x$
-2	
-1	
0	
1	
2	

b)

x	$g(x) = 4^x$
-2	
-1	
0	
1	
2	



Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

c)

x	$h(x) = e^x$
-2	
-1	
0	
1	
2	

10. ¿Qué punto comparten las 3 funciones? ¿Por qué?

11. Dado que $f(x) = 2^x, g(x) = 4^x, y\ h(x) = e^x$, crea una verdadera desigualdad al completar los espacios de las desigualdades con $f(x), g(x), o\ h(x)$.

a) _____ < _____ < _____ cuando x > 0

b) _____ < _____ < _____ cuando x < 0

c) Escribe una expresión que describa la relación entre $f(x), g(x), y\ h(x)\ cuando\ x = 0$. c)

RENDIMIENTO

Tema: Explorar propiedades de logaritmos.

Reemplaza los signos de interrogación y completa los espacios en blanco con tu propia lógica y lo que sabes sobre logaritmos.

12. $log_7 1 = 0$ porque $7^? =$ _____.

13. $log_a 1 = 0$ porque $a^? =$ _____.

14. $log_6 6 = 1$ porque $6^? =$ _____.

15. $log_a a = 1$ porque $a^? =$ _____.

16. $log_4 4^x =$ _____ porque $4^? = 4^x$.

17. $log_a a^x =$ _____ porque $a^? = a^x$.

18. Si $log_a x = log_a y, entonces$ _____ = _____.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

19. $3^{log_3 81} =$ _____ porque $log_3 81$ es igual al exponente _____ que hace $3^? = 81$.

20. $a^{log_a x} =$ _____ porque $log_a x$ es igual al exponente que hace que un $a^? = x$.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.7H Los Logaritmos se vuelven virales

Actividad para Consolidar Comprensión

CC BY Shannon O'Saurus
https://flic.kr/p/dkH1gn

Como aprendimos en Problema de Interés Compuesto, cuando el monto principal de una inversión se capitaliza continuamente, resulta que la base de la función de crecimiento exponencial es e≈2.71828. Es cierto que, básicamente, todas las situaciones que crecen o decrecen continuamente, se pueden modelar con una función exponencial de base *e*. Las fórmulas básicas son:

Crecimiento continuo:

$A = Pe^{rt}$

Decrecimiento continuo:

$A = Pe^{-rt}$

En ambos casos, *A* es la cantidad de "cosas" en el tiempo *t*. *P* es la cantidad de "cosas" para comenzar, o en *t* = 0, y *r* es la tasa de crecimiento o decrecimiento. Entonces, si hablamos de dinero, *A* y *P* son montos en dólares. Si hablamos de una población, *A* y *P* son la cantidad de personas en la población. Si estamos hablando de la desintegración radioactiva, entonces *A* y *P* son la masa de la sustancia radioactiva. En otras palabras, *P* es con lo que comenzamos y *A* es lo que tenemos después de que crece o decrece.

Dado que hay muchas cosas que crecen o decrecen continuamente en la naturaleza, *e* se denomina función exponencial natural y el logaritmo de base *e* se denomina logaritmo natural. Piensa en el crecimiento de las bacterias. Una célula se divide en dos células. Las dos células comienzan a dividirse, y las células resultantes se dividen y así sucesivamente. En un grupo de muchas células, habría una división celular casi continuamente, por lo tanto, es una función exponencial de base *e*. Por lo tanto, para usar esta base *e* exponencial y su función inversa, imagina los siguientes escenarios:

Tu eres un epidemiólogo, una persona que estudia el brote y la diseminación de enfermedades. Parte de tu trabajo es ayudar a evitar una pandemia: un brote mundial de una enfermedad. Tu sabes que algunas de las enfermedades más difíciles de tratar son los virus porque no responden a muchos de los medicamentos que tenemos disponibles y porque los virus pueden mutar y cambiar rápidamente, lo que hace que sea más difícil contenerlos.

Has estado estudiando un nuevo virus que causa que a las personas le salgan ronchas. De repente, un colega corre a tu oficina para informarte que hay un brote confirmado del virus en Europa. El crecimiento del virus a través de la población es continuo (hasta que de alguna manera se contiene) a una tasa de alrededor del 3% por día. El brote actual tiene 5 víctimas confirmadas.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

1. Con esta información, crea un modelo de propagación del virus detectado en esta región si no está contenido. Para simplificar un poco tu modelo, considera las 5 víctimas como el número de víctimas en el día 0.

Tabla

Gráfica

Ecuación

2. Según tu modelo, ¿cuántas personas se infectarán en:

   a) ¿El día 30?

   b) ¿El día 60?

3. Según tu modelo, ¿en qué día habrá 50 víctimas? Muestra cómo llegaste a tu respuesta.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

4. ¿El número de días que tomará al virus para reclamar 100 víctimas será el doble de días que se necesitaron para reclamar 50 víctimas? ¿Por qué sí o por qué no?

5. Calcula la cantidad de días que tomará al virus reclamar 100 víctimas.

6. ¿En qué día habrá 150 víctimas?

Ahora recibes un informe de una misteriosa enfermedad que parece convertir a los humanos infectados en zombis, estalló en una importante ciudad estadounidense. Dado que los zombis hambrientos se aprovechan de personas inocentes, el brote crece continuamente a una tasa del 12% por día. El brote comienza con 80 personas.

7. ¿Cuántos zombis habrá después de 5 días?

8. ¿Cuántos días demorará la población de zombis en llegar a 3,700,000 (aproximadamente la población de Los Angeles, CA)?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

9. ¿A qué velocidad estaría creciendo la población zombi si llegara a 190,000 personas (aproximadamente la población de Salt Lake City, Utah) en 20 días?

Ahora vamos a exagerar un poco más el escenario. Digamos que los zombis producen una sustancia radioactiva que decrece continuamente con una vida media de 3 años. (Ese es un peligro más de tener zombis alrededor). La vida media nos dice que después de 3 años, solo queda la mitad de la cantidad de sustancia pegajosa con la que empezamos.

10. Si comenzamos con 10 libras de sustancia pegajosa, ¿cuánto quedará después de 5 años?

11. ¿Cuánto tiempo demorará la cantidad de sustancia pegajosa en decrecer en una cantidad menor a 0.5 libras?

12. ¿Cuándo no quedará nada de sustancia pegajosa?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

Tema: Identificación de patrones polinómicos mediante la examinación de las tasas de crecimiento.

Completa la tabla para cada una de las funciones dadas.

1.

x	$y = x^1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

2.

x	$y = x^2$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

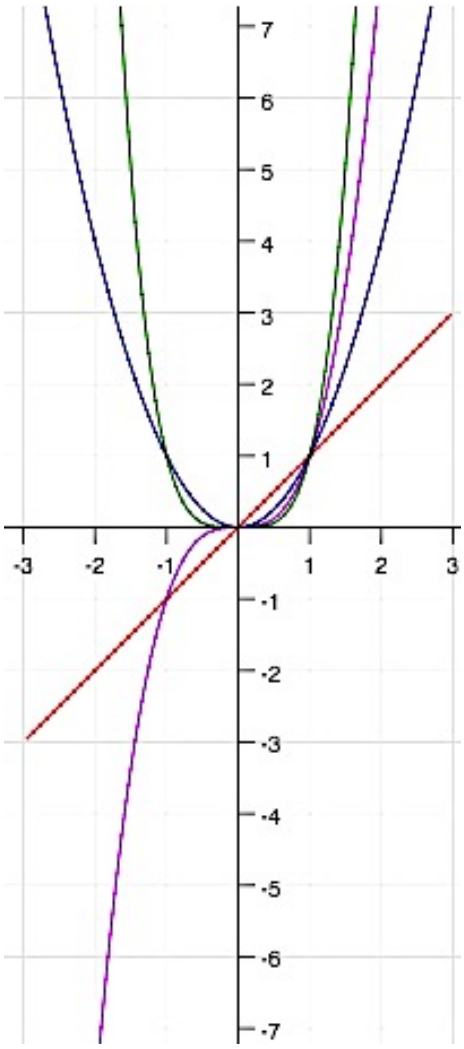
3.

x	$y = x^3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

4.

x	$y = x^4$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

5. Rotula cada gráfica con la función que la describe.



6. Identifica el (los) punto (s) que comparten todas las funciones. Explica por qué esto es lógico.

7. Contrasta las gráficas de las funciones pares con los gráficos de las funciones impares.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

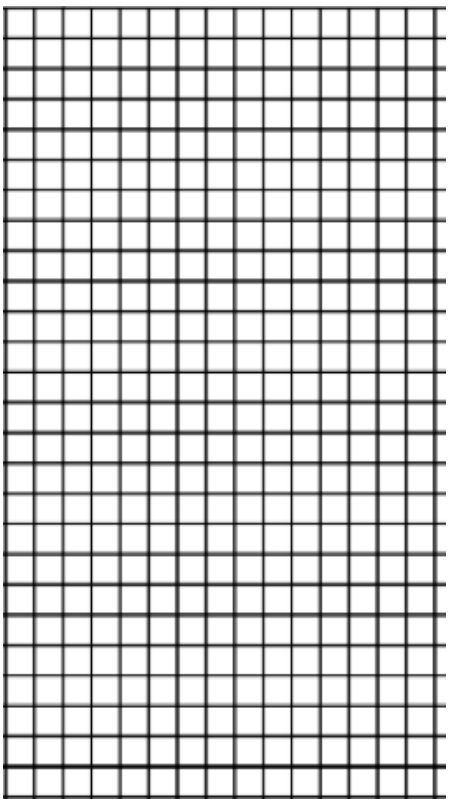
PRÁCTICA

Tema: Usar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales.

8. Se sabe que una cierta población de bacterias se duplica cada 15 minutos. Se lleva a cabo un experimento en un laboratorio de microbiología. Supongamos que inicialmente hay 7 bacterias en una placa de Petri.

Haz una tabla, una gráfica y una ecuación que prediga el número de bacterias en *t* horas. Etiqueta la escala en los ejes *x* e *y*. Los incrementos en el eje *x* deben ser ¼ de hora o menos. Asegúrate de que puedas incluir al menos 3 puntos en tu gráfica.

Tiempo en horas (4 periodos de duplicación por hora)	Numero de bacterias
0	
1	
2	
3	
4	
5	



Ecuación:

9. ¿Entre qué horas (al ¼ de hora más cercano) el número de bacterias superará 10,000? ¿1,000,000?

10. Predice el número de bacterias después de un período de 24 horas. (Escribe tu respuesta en notación científica).

11. Escribe una ecuación logarítmica que te permita encontrar el tiempo *t* cuando hay 700 bacterias.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

12. Calcula el tiempo cuando hay 700 bacterias. (Redondea tu respuesta a 3 decimales).

RENDIMIENTO

Tema: Aplicar las propiedades de los logaritmos.

Utiliza las propiedades de los logaritmos y los valores a continuación, para encontrar el valor del logaritmo indicado. No utilices una calculadora para evaluar los logaritmos.

13. $log\ 12 \approx 1.1$ Encuentra $log\frac{2}{3}$.

    $log\ 8 \approx 0.9$

    $log\ 7 \approx 0.8$

14. $log\ 12 \approx 1.1$ Encuentra $log\frac{1}{7}$.

    $log\ 8 \approx 0.9$

    $log\ 7 \approx 0.8$

15. $log\ 12 \approx 1.1$ Encuentra $log\frac{7}{8}$.

    $log\ 8 \approx 0.9$

    $log\ 7 \approx 0.8$

16. $log\ 12 \approx 1.1$ Encuentra $log\frac{3}{14}$.

    $log\ 8 \approx 0.9$

    $log\ 7 \approx 0.8$

17. $log_8 6 \approx 0.86$ Encuentra $log_8 729$.

    $log_8 9 \approx 1.06$

    $log_8 7 \approx 0.94$

18. $log_8 6 = A$ Encuentra $log_8 729$.

    $log_8 9 = B$

    $log_8 7 = C$

19. $log_8 6 \approx 0.86$ Encuentra $log_8 \frac{2}{3}$.

    $log_8 9 \approx 1.06$

    $log_8 7 \approx 0.94$

20. $log_8 6 = A$ Encuentra $log_8 \frac{14}{3}$.

    $log_8 9 = B$

    $log_8 7 = C$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.8H Elige Esto, No Aquello

Actividad para Consolidar Comprensión

CC BY mollybob
https://flic.kr/p/57CrVe

En cada una de las siguientes ecuaciones, tienes dos opciones para el próximo paso. Tu trabajo es elegir la más productiva de las dos opciones, resolver la ecuación y verificar tu solución para asegurarte de haber tomado la decisión correcta. Cuando hayas terminado, verifica y explica por qué la opción que no elegiste era incorrecta o improductiva.

1. $\log 2x = 3$

Opción 1: $2x = \log 3$ Opción 2: $10^3 = 2x$

Solución: Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

2. $\ln(x + 3) = 2$

Opción 1: $\ln x + \ln 3 = 2$ Opción 2: $e^2 = x + 3$

Solución: Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

3. $\log_3(2x+1) = 2$

Opción 1: $3^{2x+1} = 3^2$

Opción 2: $2x + 1 = 3^2$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

4. $\log_5(2x-7) = \log_5 3$

Opción 1: $2x - 7 = 3$

Opción 2: $5^3 = 2x - 7$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

5. $2\log_3 x = \log_3 4$

Opción 1: $2x = 4$

Opción 2: $\log_3 x^2 = \log_3 4$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

6. $3\ln x = \ln 16 + \ln 4$

Opción 1: $\ln x^3 = \ln(16 \cdot 4)$

Opción 2: $3x = 16 + 4$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

7. $\log_2 2x - \log_2(x-2) = \log_2 3$

Opción 1: $\log_2\left(\frac{2x}{x-2}\right) = \log_2 3$

Opción 2: $\frac{\log_2 2x}{\log_2(x-2)} = \log_2 3$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

8. $-2 = \log_x \frac{1}{9}$

Opción 1: $x^{-2} = \frac{1}{9}$

Opción 2: $-2 = \log_x 1 - \log_x 9$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

9. $x = \log_3 10$

Opción 1: $x^3 = 10$

Opción 2: $3^x = 10$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

10. $\log_a(x^2 + 1) + 2\log_a 4 = \log_a 40x$

Opción 1: $\log_a 16(x^2 + 1) = \log_a 40x$

Opción 2: $\log_a 8(x^2 + 1) = \log_a 40x$

Solución:

Verifica:

Por qué no seleccioné la opción ____:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

Tema: Evaluar funciones.

1. Encuentra $h(-11)$ dado que $h(x) = 2x^2 + 9x - 43$
2. Encuentra $r(-1)$ dado que $r(x) = -5x^2 - 3x + 9$
3. Encuentra $f(4)$ dado que $f(x) = x^2 + 11$.
4. Encuentra $m(3)$ dado que $m(x) = \log_x 81$.
5. Encuentra $g(-3)$ dado que $g(x) = x^2 + 2x + 4$.
6. Encuentra $p(3)$ dado que $p(x) = 5^x + 2x$.
7. Encuentra $q(2)$ dado que $q(x) = 7^x + 11x$.
8. Encuentra $s\left(\frac{1}{2}\right)$ dado que $s(x) = 12x^2$.

PRÁCTICA

Tema: Encontrar soluciones a ecuaciones logarítmicas.

Se dan tres soluciones posibles para cada ecuación. Determina qué solución es correcta. Justifica tus respuestas.

9. $\log 5x = 3$
   a. $x = 3 - \log 5$
   b. $x = 200$
   c. $x = \frac{3}{5}$

10. $\log(x + 28) = 2$
    a. $x = 72$
    b. $x = 2 - \log 28$
    c. $x = \frac{100}{28}$

11. $\log_3(2x + 1) = 2$
    a. $x = \frac{1}{2}$
    b. $x = \frac{5}{2}$
    c. $x = 4$

12. $\log_5(3x - 8) = \log_5 13$
    a. $x = 7$
    b. $x = \frac{5^{13}+8}{3}$
    c. $x = \frac{104}{3}$

13. $3\log x = \log 16 + \log 4$
    a. $x = \frac{20}{3}$
    b. $x = 4$
    c. $x = \sqrt[3]{10^{20}}$

14. $\log_2 2x - \log_2(x - 2) = \log_2 3$
    a. $x = 6$
    b. $x = 3$
    c. $x = -6$

15. $-3 = \log_x\left(\frac{1}{8}\right)$
    a. $x = -2$
    b. $x = 2$
    c. $x = 4$

16. $x = \log_3 15$
    a. $x = \sqrt[3]{15}$
    b. $x = 5$
    c. $x \approx 2.465$

17. $\log_a(x - 7) = 0$
    a. $x = 7$
    b. $x = 8$
    c. *no tiene solución*

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Encierra en un círculo las expresiones que son iguales. Explica por qué son iguales.

18. $log_5\sqrt{50}, \quad log_5 25, \quad 1 + log_5\sqrt{2}$

19. $\frac{log_2 32}{log_2 4}, \quad log_2 \frac{32}{4}, \quad log_2 32 - log_2 4$

20. $log\sqrt{90}, \quad log3 + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}log2 + \log 45$

21. $log_7\left(\frac{1}{49}\right), \quad log_7 1 - log_7 49, \quad -2(log_7 7)$

RENDIMIENTO

Tema: Resolver ecuaciones exponenciales.

Resuelve *x*.

22. $4^{(2x-7)} = 64$

23. $5^x = \frac{1}{125}$

24. $3^{(2x+8)} = 729$

25. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 128$

26. $36^{(x+5)} = 216^{(x-3)}$

27. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81}$

28. $3^{-x} = 27$

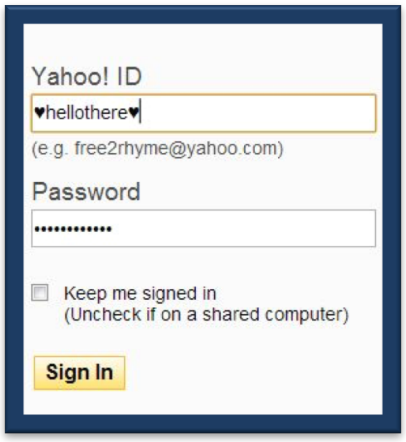
29. $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{16}{9}$

30. $125^{(3x-4)} = 625^{(x+1)}$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.9H No Olvides tu Logaritmo

Actividad para Practicar Comprensión



CC BY Intel Free Press
https://flic.kr/p/dTcZhM

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. Cuando hayas terminado, clasifica las ecuaciones en categorías según la estrategia que utilizaste para resolverlas. Nombra cada categoría y luego describe cómo resolver ecuaciones en esta categoría.

1. $\log 3x = 2$

2. $-3 = \log_x \frac{1}{125}$

3. La velocidad a la que se elimina la cafeína del torrente sanguíneo de un adulto promedio es aproximadamente el 15% por hora. Si el nivel máximo de cafeína en el torrente sanguíneo es de 30 miligramos, la cantidad de cafeína que queda en el torrente sanguíneo t horas después de que la cafeína alcanza su nivel máximo, puede modelarse según la función: $C(t) = 30(0.85)^t$. ¿Después de cuántas horas quedan 15 mg en el torrente sanguíneo?

4. $x = \log_5 100$

5. $\ln(5x - 3) + \ln 2 = \ln(24 - 2x)$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

6. $\log_5(4x-3) = \log_5 29$

7. La escala de Richter, que mide la magnitud de los terremotos es una escala logarítmica, donde la magnitud del terremoto, *M,* depende de la energía liberada por el terremoto E (en Joules). En 1994, un terremoto de magnitud 6.6 en la escala de Richter lastimó a miles de personas y costó miles de millones de dólares en daños y perjuicios. Ese terremoto podría ser modelado con la ecuación: $6.6 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$. Encuentra la energía liberada por el terremoto.

8. $\log_5(3x+1) = 2$

9. $\log_b x^3 = \log_b 27$

10. ¿Alguna vez te has preguntado por qué de repente tu cocina está llena de moscas de la fruta? Dadas las buenas condiciones, las poblaciones de mosca de la fruta pueden crecer a una tasa asombrosa de 28% por día. Si entran 25 moscas de la fruta en tu casa para pasar el rato en una fruta madura, la población de moscas después de t días se puede modelar de la siguiente manera: $P(t) = 25(1.28)^t$. ¿Cuánto tiempo tomará tener 100 pequeñas moscas de la fruta zumbando?

11. $\log_x 5 = \frac{1}{4}$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

12. $3^x = 5^{2.3}$

13. $\log_2 2x - \log_2(x-2) = \log_2 3$

14. $\log_3 2x = \log_3(x-1)$

15. $\ln(x-1) = 3$

16. $\log(x^2-2) + 2\log 6 = \log 6x$

17. $x = \log_3 10$

18. $2\log_a x + \log_a 2 = \log_a(5x+3)$

19. $3 + 7^{3x+1} = 346$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Nombre y descripción de la categoría:	Nombre y descripción de la categoría:
Cómo resolver ecuaciones en esta categoría:	Cómo resolver ecuaciones en esta categoría:
Nombre y descripción de la categoría:	Nombre y descripción de la categoría:
Cómo resolver ecuaciones en esta categoría:	Cómo resolver ecuaciones en esta categoría:
Nombre y descripción de la categoría:	Nombre y descripción de la categoría:
Cómo resolver ecuaciones en esta categoría:	Cómo resolver ecuaciones en esta categoría:

Nota: Es posible que no necesites todas estas categorías.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN

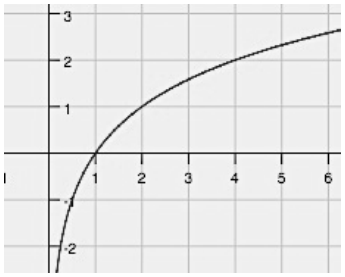
Tema: Comparación de soluciones e intersecciones de x.

Resuelve x en cada ecuación.

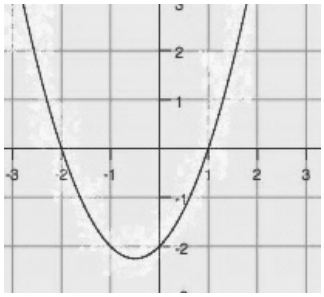
1. $x^2 + x - 2 = 0$
2. $2x - 6 = 0$
3. $0 = log_2 x$
4. $x^3 - 4x = 0$

5. Combina cada una de las gráficas a continuación con una de las ecuaciones anteriores. Explica el criterio que usaste para decidir qué gráfica estaba relacionada con cada ecuación.

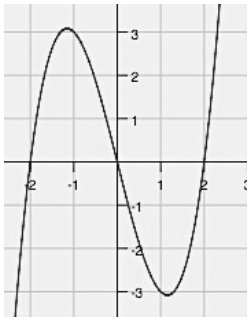
a) ¿ecuación? ¿cómo lo supiste?



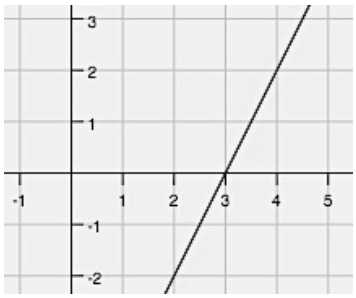
b) ¿ecuación? ¿cómo lo supiste?



c) ¿ecuación? ¿cómo lo supiste?



d) ¿ecuación? ¿cómo lo supiste?



6. Compara las soluciones de cada ecuación con las intersecciones de x en las gráficas. Haz una declaración sobre tus observaciones.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PRÁCTICA

Tema: Resolución de ecuaciones logarítmicas.

Resuelve cada ecuación.

7. $3\,log_2(x+4) = 9$

8. $log_3(x^2+2) = 3$

9. $log_5(x^2+x+5) = 2$

10. $2log_5 x = 3log_5 4$

11. $log_7(3x) = log_7(5x-8)$

12. $log(7x-12) = 2logx$

13. $4^{1-2x} = 2$

14. $9^{2x} = 27^{3x-4}$

15. $5^{x-3} = \sqrt{5}$

16. $10^{2x} = 80$

17. $\log_2 4x - \log_2(x-5) = \log_2 8$

18. $-3log_5\left(\frac{7x}{10}\right) = 3$

19. En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I es $R = log_{10}\frac{I}{I_0}$, donde $I_0 = 1$ es la intensidad mínima utilizada para la comparación. Si sustituimos 1 por I_0, la fórmula para medir la intensidad por unidad de área de un terremoto se convierte en $R = log_{10}I$.

    Encuentra la intensidad I para cada uno de los siguientes terremotos:

    a) San Francisco, California 1906: R = 7.7

    b) The World Series, San Francisco, California 1989: R = 6.9

    c) El terremoto de 1906 fue "solo" 0.8 unidades más en la escala de Richter. Eso no parece mucho. Crea una proporción de la intensidad del terremoto de 1906 con la del terremoto de 1989. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de 1906?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

RENDIMIENTO

Tema: Revisar funciones logarítmicas.

Ordena las siguientes expresiones en orden numérico de menor a mayor. No utilices una calculadora. Prepárate para explicar tu lógica.

	1	2	3	4	5
20.	$log_3 81$	$log_5 125$	$log_8 8$	$log_4 1$	$log 100$
21.	$log 200$	$log\ 0.02$	$log_2 10$	$log_2 \frac{1}{10}$	$log_2 200$

22. Convertir a forma logarítmica. a) $3^6 = 729$ b) $5^{-2} = 0.04$ c) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{4}$

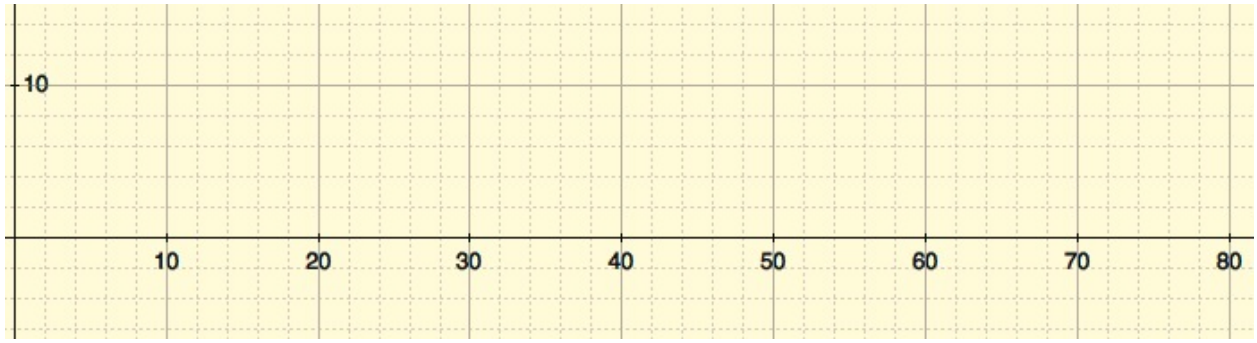
23. Convertir a forma exponencial. a) $log_6\ 216 = 3$ b) $log_9\ 1 = 0$ c) $log_2\ 0.5 = -1$

Utiliza las propiedades de los logaritmos para volver a escribir cada expresión en forma expandida. Supongamos que todas las variables representan números reales positivos.

24. $log_4 4x^3$ 25. $log_5 \sqrt{\frac{m}{n}}$ 26. $log_3 \frac{9w}{xyz}$

27. El número de peces en un acuario se da por $f(t) = 4log(5t + 10)$, donde t es el tiempo en meses. Encuentra el número de peces presentes dados los siguientes tiempos. Luego grafica $f(t)$.

a) $t = 0$ b) $t = 12$ c) $t = 24$ d) $t = 36$ e) $t = 60$ f) $t = 72$



Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org