mathematics vision project

Transforming Mathematics Education

NIVEL SECUNDARIA MATEMÁTICAS III

Un enfoque integrado

MÓDULO 3

Funciones Polinómicas

MATHEMATICSVISIONPROJECT.ORG

The Mathematics Vision Project

Scott Hendrickson, Joleigh Honey, Barbara Kuehl, Travis Lemon, Janet Sutorius

© 2018 Mathematics Vision Project
Original work © 2013 in partnership with the Utah State Office of Education

This work is licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0

MÓDULO 3 - TABLA DE CONTENIDO

FUNCIONES POLINÓMICAS

3.1 Marcha de Scott – *Actividad para Desarrollar Comprensión*
Introducir funciones polinómicas y sus tasas de cambio **(F.BF.1, F.LE.3, A.CED.2)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. *Funciones Polinómicas 3.1*

3.2 Combinar Cubos – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Graficar $y = x^3$ con transformaciones y comparar con $y = x^2$. **(F.BF.3, F.IF.4, F.IF.5, F.IF.7)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.2*

3.3 Todo Concuerda – *Actividad para Desarrollar Comprensión*
Sumar y restar polinomios **(A.APR.1, F.BF.1, F.IF.7, F.BF.1b)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.3*

3.4 El orgullo de Pascal – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Multiplicar polinomios y usar el patrón de Pascal para expandir binomios **(A.APR.1, A.APR.5)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.4*

3.5 Dividir y Conquistar – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Dividir polinomios y escribir expresiones equivalentes utilizando el teorema del residuo polinomial **(A.APR.1, A.APR.2)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.5*

3.6 Lo sentimos, está cerrado – *Actividad para Practicar Comprensión*
Comparar polinomios y enteros y determinar el cierre bajo operaciones dadas **(A.APR.1, F.BF.1b)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.6*

3.7 Construyendo raíces fuertes – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Entender el teorema fundamental de álgebra y aplicar a las funciones cúbicas para encontrar las raíces **(A.SSE.1, A.APR.3, N.CN.9)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.7*

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

3.8 Llegando a la raíz del problema – *Actividad para Consolidar Comprensión*
Encontrar las raíces de los polinomios y escribir ecuaciones polinómicas en forma factorizada (**A.APR.3, N.CN.8, N.CN.9)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.8*

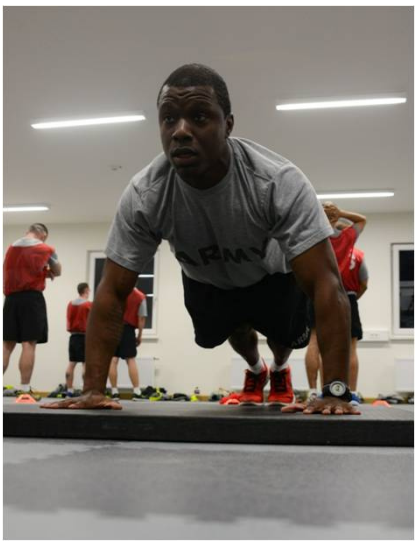
3.9 ¿Es esto el final?– *Actividad para Consolidar Comprensión*
Examinar el comportamiento final de los polinomios y determinar si son pares o impares **(F.LE.3, A.SSE.1, F.IF.4, F.BF.3)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.9*

3.10 Rompecabezas Polinómicos – *Actividad para Practicar Comprensión*
Analizar polinomios, determinar raíces, comportamiento final y escribir ecuaciones. (**A.APR.3, N.CN.8, N.CN.9, A.CED.2)**
Tarea: Preparación, Práctica, Rendimiento. Funciones Polinómicas *3.10*

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

3.1 Marcha de Scott

Actividad para Desarrollar Comprensión



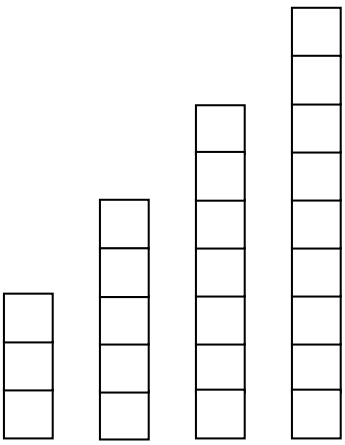
CC BY US Army Ohio
https://flic.kr/p/fxuNzc

Cada año, Scott participa en la promoción "Marcha Macho". El objetivo de la "Marcha Macho" es recaudar fondos para caridad mediante la búsqueda de patrocinadores que hagan donaciones en función del número de lagartijas completadas en un mes. El año pasado, Scott estaba orgulloso del dinero que recaudó, pero también estaba decidido a aumentar la cantidad de lagartijas que completaría este año.

Parte I: Revisitando el pasado

A continuación, se muestra la gráfica de barras y la tabla que usó Scott el año pasado para realizar un seguimiento de la cantidad de lagartijas que completó cada día, mostrando que completó tres lagartijas el día uno y cinco (para un total combinado de ocho lagartijas) en el día dos. Scott continuó este patrón durante todo el mes.

n Días	$f(n)$ Lagartijas **cada día**	$g(n)$ **Número total** de lagartijas en el mes
1	3	3
2	5	8
3	7	15
4	9	24
5	11	35
…	…	
n		



Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

1. Escribe las ecuaciones recursivas y explícitas para el número de lagartijas que Scott completó **en cualquier día** el año pasado. Explica cómo se conectan tus ecuaciones con la gráfica de barras y la tabla de arriba.

2. Escribe la ecuación recursiva y explícita para **el número total acumulado de lagartijas que Scott completó un día cualquiera** durante la promoción "Marcha Macho" el año pasado.

n Días	$f(n)$ Lagartijas cada **día el año pasado**	$g(n)$ **Número total** de lagartijas en el mes	$m(n)$ Lagartijas cada **día este año**	$T(n)$ **Total** de lagartijas completadas en el mes
1	3	3	3	
2	5	8	8	
3	7	15	15	
4	9	24		
5				
…	…			
n				

Parte II: Marcha de Scott

Este año, el plan de Scott es observar la cantidad total de lagartijas *que completó durante el mes del año pasado (g (n))* y hacer esa cantidad de lagartijas cada día *(m (n)).*

3. ¿Cuántas lagartijas completará Scott en el día cuatro? ¿Cómo se te ocurrió este número? Escribe la ecuación recursiva para representar el número total de lagartijas que Scott completará para el mes en un día determinado.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

4. ¿Cuántas lagartijas en **total** completará Scott para el mes en el día cuatro?

5. Sin encontrar la ecuación explícita, haz una conjetura sobre el tipo de función que representaría la ecuación explícita para el número total de lagartijas que Scott completaría en cualquier día para la promoción de este año.

6. ¿Cómo se compara la tasa de cambio para esta ecuación explícita con las tasas de cambio para las ecuaciones explícitas en las preguntas 1 y 2?

7. Prueba tu conjetura de la pregunta 5 y justifica que siempre será cierta (ve si puedes generalizar para todas las funciones polinómicas).

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Completar afirmaciones de desigualdad

Coloca el símbolo de desigualdad apropiado entre las dos expresiones para que la afirmación sea verdadera.

Si $a > b$, *entonces*:

1. $3a$ ___ $3b$
2. $b - a$ ___ $a - b$
3. $a + x$ ___ $b + x$

Si $x > 10$, *entonces*:

4. x^2 ___ 2^x
5. $\sqrt{x}$ ___ x^2
6. x^2 ___ x^3

Si $0 < x < 1$

7. x ___ x^2
8. $\sqrt{x}$ ___ x
9. x ___ $3x$

PRÁCTICA

Tema: Clasificación de funciones

Identifica el tipo de función para cada problema. Explica cómo lo sabes.

10

x	$f(x)$
1	3
2	6
3	12
4	24
5	48

11.

x	$f(x)$
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

12.

x	$f(x)$
1	3
2	9
3	18
4	30
5	45

13.

x	$f(x)$
1	7
2	9
3	13
4	21
5	37

14.

x	$f(x)$
1	-26
2	-19
3	0
4	37
5	98

15.

x	$f(x)$
1	-4
2	3
3	18
4	41
5	72

16. ¿Cuál(es) de las funciones anteriores NO son polinomios?

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

RENDIMIENTO

Tema: Recordando la división larga y el significado de un factor

Encuentra el cociente sin usar una calculadora. Si hay un remanente, escríbelo como un número entero. Ejemplo: $21\overline{)149}$ **remanente 2**

17. $30\overline{)510}$

18. $13\overline{)8359}$

19. ¿Es 30 un factor de 510? ¿Cómo lo sabes?

20. ¿Es 13 un factor de 8359? ¿Cómo lo sabes?

21. $22\overline{)14857}$

22. $952\overline{)40936}$

23. ¿Es 22 un factor de 14587? ¿Cómo lo sabes?

24. ¿Es 952 un factor de 40936? ¿Cómo lo sabes?

25. $92\overline{)3405}$

26. $27\overline{)3564}$

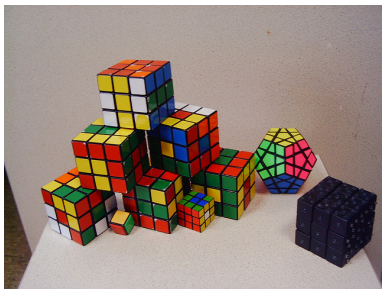
27. ¿Es 92 un factor de 3405?

28. ¿Es 27 un factor de 3564?

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

3.2 Combinar Cubos

Actividad para Consolidar Comprensión



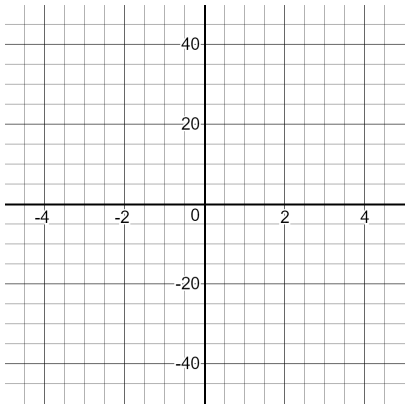
CC BY Steren Giannini
https://flic.kr/p/7LJfWC

En la Marcha de Scott, la función que fue generada por la suma de términos en una función cuadrática fue llamada **función cúbica**. Las funciones lineales, las funciones cuadráticas y las funciones cúbicas están todas en la familia de funciones llamadas **polinomios**, que también incluyen funciones de potencias superiores. En esta tarea, exploraremos más sobre las funciones cúbicas para ayudarnos a ver algunas de las similitudes y diferencias entre las funciones cúbicas y las funciones cuadráticas.

Para comenzar, echemos un vistazo a la función cúbica más básica, $f(x) = x^3$ Técnicamente, es un **polinomio de grado 3** porque el exponente más alto es 3, pero se llama función cúbica porque estas funciones se usan a menudo para modelar el volumen. Esto es como funciones cuadráticas que son **polinomios de grado 2** pero se llaman cuadráticas después de la palabra latina para cuadrado. La Marcha de Scott mostró que las funciones lineales tienen una tasa de cambio constante, las funciones cuadráticas tienen una tasa de cambio lineal y las funciones cúbicas tienen una tasa de cambio cuadrática.

1. Usa una tabla para verificar que $f(x) = x^3$ tiene una tasa de cambio cuadrática.

2. Grafica $f(x) = x^3$

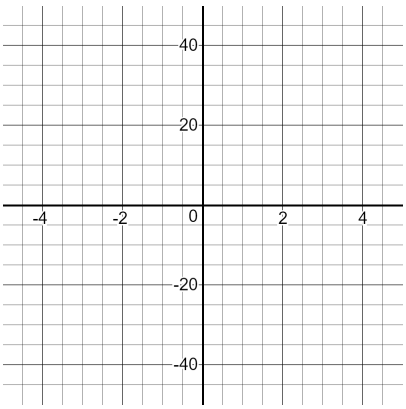


Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

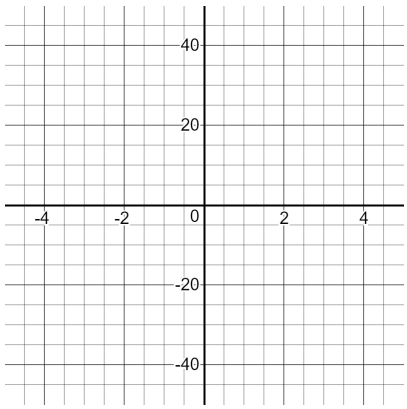
3. Describe las características de $f(x) = x^3$ incluyendo intersecciones, intervalos de aumento o disminución, dominio, rango, etc.

4. Usando tu conocimiento de transformaciones, grafica lo siguiente sin usar tecnología.

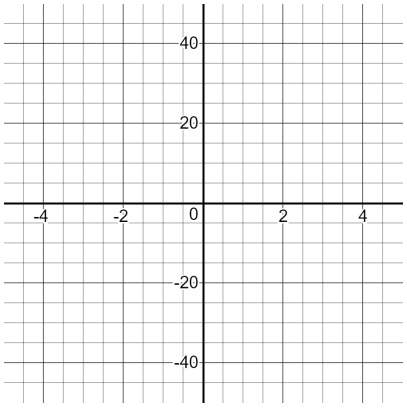
a) $f(x) = x^3 - 3$



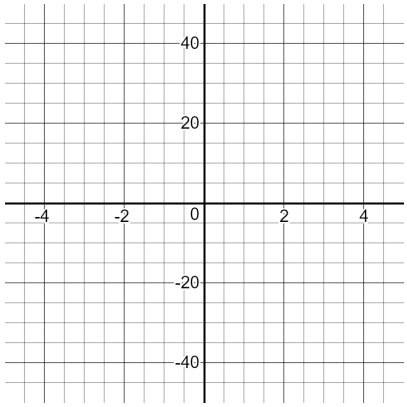
b) $f(x) = (x + 3)^3$



c) $f(x) = 2x^3$



d) $f(x) = -(x - 1)^3 + 2$



5. Usa la tecnología para revisar tus gráficas de arriba. ¿Qué transformaciones hiciste bien? ¿En qué áreas necesitas mejorar para que tus gráficas cúbicas sean perfectas?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

6. Como las funciones cuadráticas y las funciones cúbicas se encuentran en la familia de funciones polinomiales, esperamos que compartan algunas características comunes. Listar todas las similitudes entre $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$.

7. Como se puede ver en la gráfica de of $f(x) = x^3$, también hay algunas diferencias reales en las funciones cúbicas y en las funciones cuadráticas. Cada una de las siguientes declaraciones describe una de esas diferencias. Explica por qué cada declaración es verdadera completando la oración.

a) El rango de $f(x) = x^3$ es $(-\infty, \infty)$, pero el rango de $g(x) = x^2$ es $[0, \infty)$ porque:

_____

b) $x > 1, f(x) > g(x)$ porque: _____

_____

c) $0 < x < 1, g(x) > f(x)$ porque: _____

_____

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

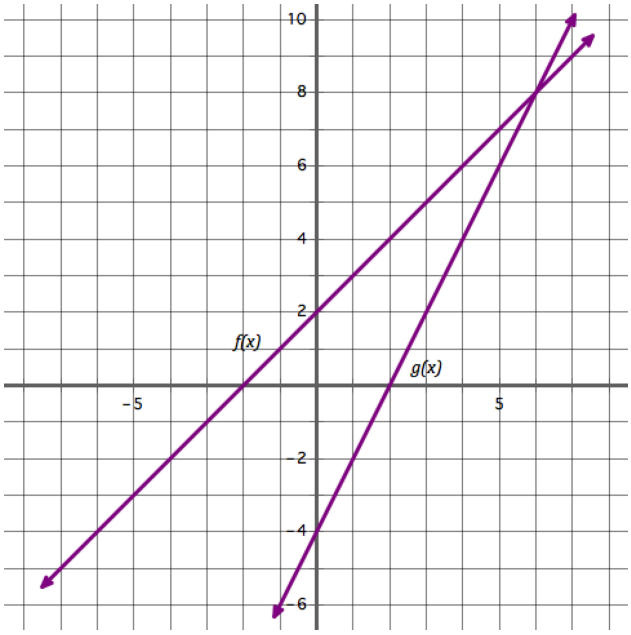
Tema: Sumar y restar binomios.

Sumar o restar como se indica.

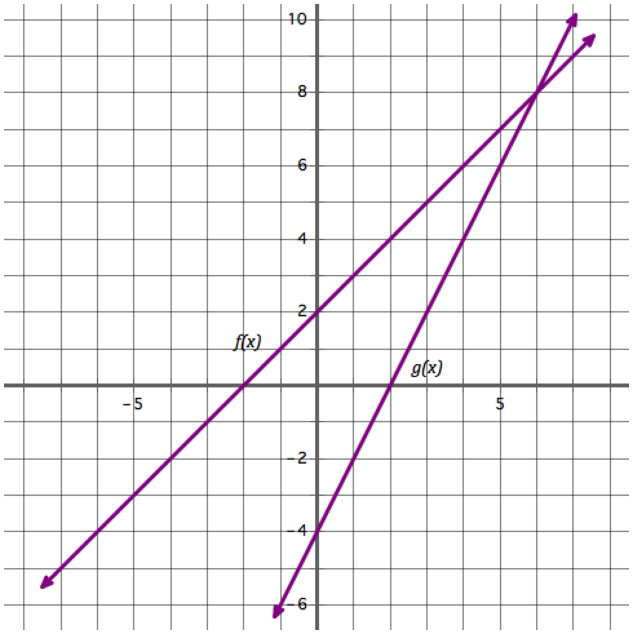
1. $(6x+3)+(4x+5)$
2. $(x+17)+(9x-13)$
3. $(7x-8)+(-2x+9)$
4. $(4x+9)-(x+2)$
5. $(-3x-1)-(2x+5)$
6. $(8x+3)-(-10x-9)$
7. $(3x-7)+(-3x-7)$
8. $(-5x+8)-(-5x+7)$
9. $(8x+9)-(7x+9)$

10. Usa las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ para dibujar las graficas de $f(x)+g(x)$ y $f(x)-g(x)$.

$f(x)+g(x)$



$f(x)-g(x)$.



© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

PRÁCTICA

Tema: Comparando polinomios simples

11. Completa las tablas de abajo para $y = x$ e $y = x^3$ e $y = x^5$

x	$y = x$
--−1	
0	
1	

x	$y = x^3$
-1—1	
0	
1	

x	$y = x^5$
-1—1	
0	
1	

12. ¿Qué suposición podrías tener la tentación de hacer acerca de las gráficas de $y = x$, $y = x^3$ e $y = x^5$ basado en los valores que encontraste en las 3 tablas anteriores?

13. ¿Qué sabes realmente de las gráficas de $y = x$ e $y = x^3$ e $y = x^5$ a pesar de los valores que encontraste en las 3 tablas anteriores?

14. Completa las tablas con los valores adicionales.

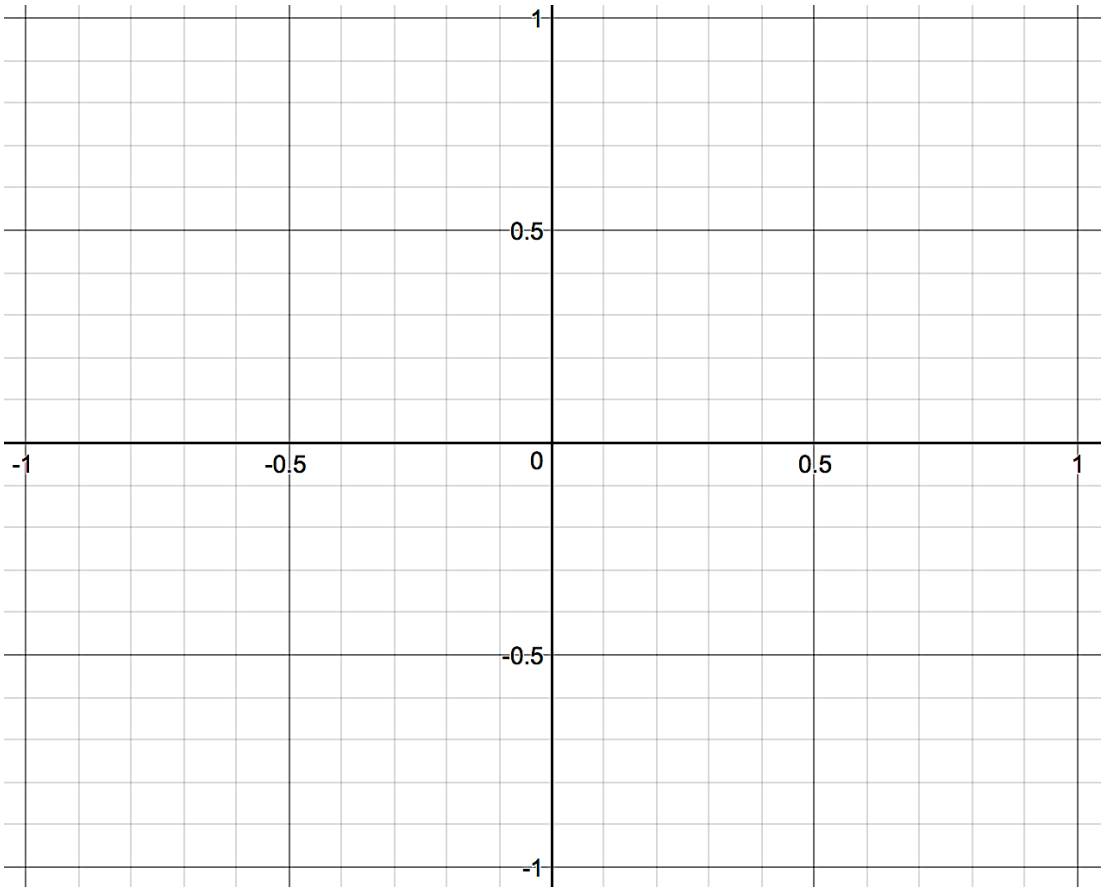
x	$y = x$
-1	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
1	

x	$y = x^3$
-1	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
1	

x	$y = x^5$
-1	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
1	

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

15. Grafica $y = x$ e $y = x^3$ e $y = x^5$ en el intervalo$[-1, 1]$, utilizando el mismo conjunto de ejes.



16. Completa las tablas con los valores adicionales.

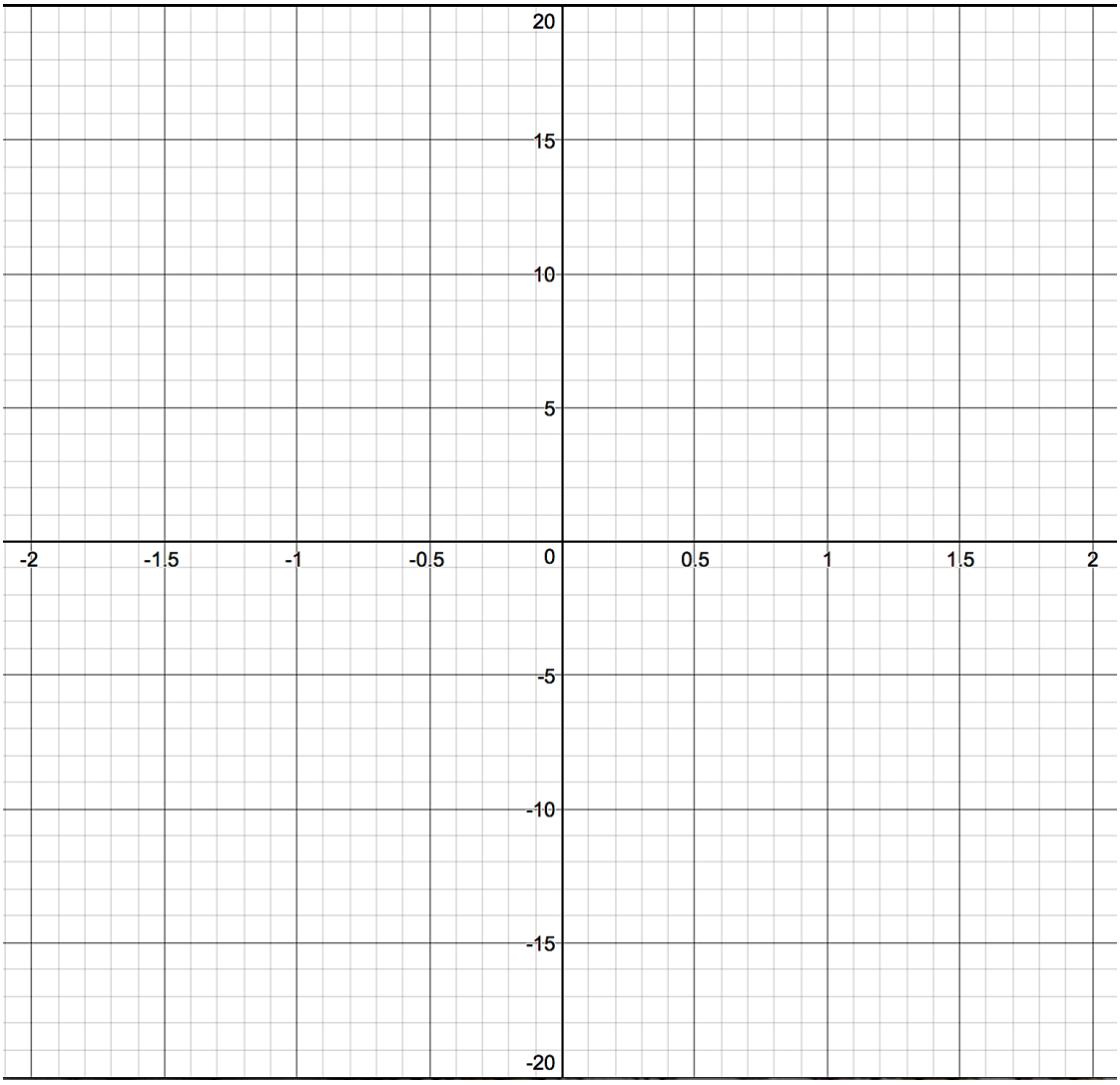
x	$y = x$
-2	
-1	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
1	
2	

x	$y = x^3$
-2	
-1	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
1	
2	

x	$y = x^5$
-2	
-1	
$-1/2$	
0	
$1/2$	
1	
2	

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

17. Grafica $y = x$ e $y = x^3$ e $y = x^5$ en el intervalo [-2, 2], utilizando el mismo conjunto de ejes.



RENDIMIENTO

Tema: Uso de las reglas de exponentes para simplificar expresiones

Simplifica.

18. $x^{1/3} \cdot x^{1/6} \cdot x^{1/4}$

19. $a^{2/5} \cdot a^{3/10} \cdot a^{2/15}$

20. $m^{4/7} \cdot m^{3/14} \cdot m^{5/28}$

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

3.3 Todo Concuerda

Actividad para Desarrollar Comprensión

CC BY Anders Sandberg
https://flic.kr/p/3GWEh4

Siempre que estemos pensando en álgebra y trabajando con variables, es útil considerar cómo se relaciona con el sistema numérico y las operaciones con números. En este momento, los polinomios están en nuestra mente, así que veamos si podemos hacer algunas
comparaciones útiles entre números enteros y polinomios.

Empecemos por mirar la estructura de los números y los polinomios. Considera el número 132. La forma en que escribimos los números es realmente un atajo porque:

$$132 = 100 + 30 + 2$$

1. Compara 132 con el polinomio $x^2 + 3x + 2$. ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

2. Escribe un polinomio que sea análogo al número 2,675.

Cuando se suman dos números, muchas personas utilizan un procedimiento como este:

$$\begin{array}{r} 132 \\ +\ \underline{451} \\ 583 \end{array}$$

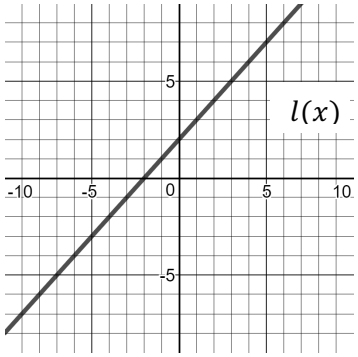
3. Escribe un problema de suma análogo para polinomios y encuentra la suma de los dos polinomios.

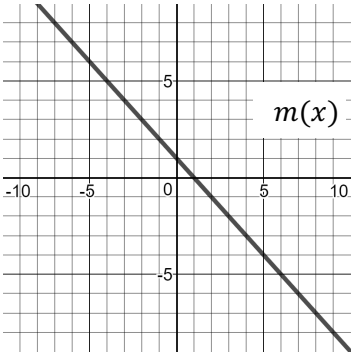
4. ¿Cómo se compara sumar polinomios a sumar números enteros?

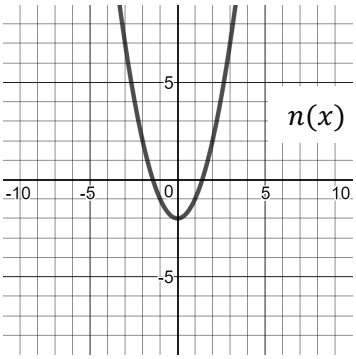
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

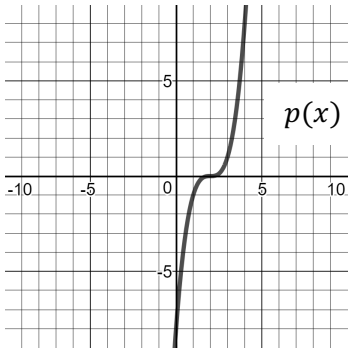
5. Usa los siguientes polinomios para encontrar las sumas especificadas en a-f.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 10$ $\quad g(x) = 2x - 1$ $\quad h(x) = 2x^2 + 5x - 12$ $\quad k(x) = -x^2 - 3x + 4$









a) $h(x) + k(x)$

b) $g(x) + f(x)$

c) $f(x) + k(x)$

_____ _____ _____

d) $l(x) + m(x)$

e) $m(x) + n(x)$

f) $l(x) + p(x)$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

6. ¿Qué patrones ves cuando se suman polinomios?

La resta de números enteros funciona de manera similar a la suma. Algunas personas alinean la resta verticalmente y restan el número inferior de la parte superior, de esta manera:

$$\begin{array}{r} 368 \\ -\underline{157} \\ 211 \end{array}$$

7. Escribe los polinomios análogos y réstalos.

8. ¿Es su respuesta a # 7 análoga a la respuesta del número entero? ¿Si no, por qué no?

9. Restar polinomios puede conducir fácilmente a errores si no realizas un seguimiento cuidadoso de tus signos positivos y negativos. Una forma en que las personas evitan este problema es simplemente cambiar todos los signos del polinomio que se está restando y luego sumar los dos polinomios juntos. Hay dos formas comunes de escribir esto:

$$(x^3 + x^2 - 3x - 5) - (2x^3 - x^2 + 6x + 8)$$

Paso 1: $= (x^3 + x^2 - 3x - 5) + (-2x^3 + x^2 - 6x - 8)$

Paso 2: $= (-x^3 + 2x^2 - 9x - 13)$

O puedes alinear los polinomios verticalmente para que el Paso 1 se vea así:

Paso 1:
$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 3x - 5 \\ \underline{+(-2x^3 + x^2 - 6x - 8)} \end{array}$$

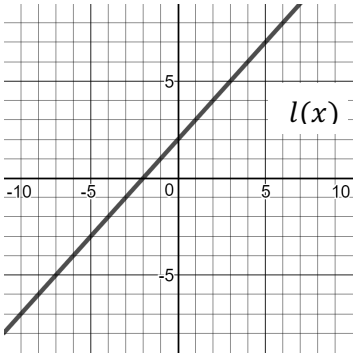
Paso 2: $-x^3 + 2x^2 - 9x - 13$

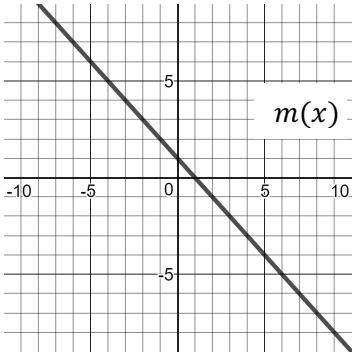
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

La pregunta para ti es: ¿Es correcto cambiar todos los signos y sumar cuando se resta? ¿Qué propiedad matemática o relación puede justificar esta acción?

10. Usa los polinomios dados para encontrar las diferencias especificadas en a-d.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 8$ $\quad g(x) = -4x - 7$ $\quad h(x) = 4x^2 - x - 15$ $\quad k(x) = -x^2 + 7x + 4$





a) $h(x) - k(x)$

_____

b) $f(x) - h(x)$

_____

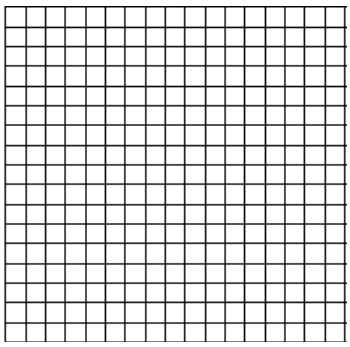
c) $f(x) - g(x)$

_____

d) $k(x) - f(x)$

_____

e) $l(x) - m(x)$



11. Enumera tres cosas importantes que debemos recordar al restar polinomios.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Uso de la propiedad distributiva

Multiplica.

1. $2x(5x^2 + 7)$
2. $9x(-x^2 - 3)$
3. $5x^2(x^4 + 6x^3)$
4. $-x(x^2 - x + 1)$
5. $-3x^3(-2x^2 + x - 1)$
6. $-1(x^2 - 4x + 8)$

PRÁCTICA

Tema: Sumar y restar polinomios

Suma. Escribe tus respuestas en orden descendente de los exponentes. (Forma estándar).

7. $(3x^4 + 5x^2 - 1) + (2x^3 + x)$
8. $(4x^2 + 7x - 4) + (x^2 - 7x + 14)$
9. $(2x^3 + 6x^2 - 5x) + (x^5 + 3x^2 + 8x + 4)$
10. $(-6x^5 - 2x + 13) + (4x^5 + 3x^2 + x - 9)$

Resta. Escribe tus respuestas en orden descendente de los exponentes. (Forma estándar).

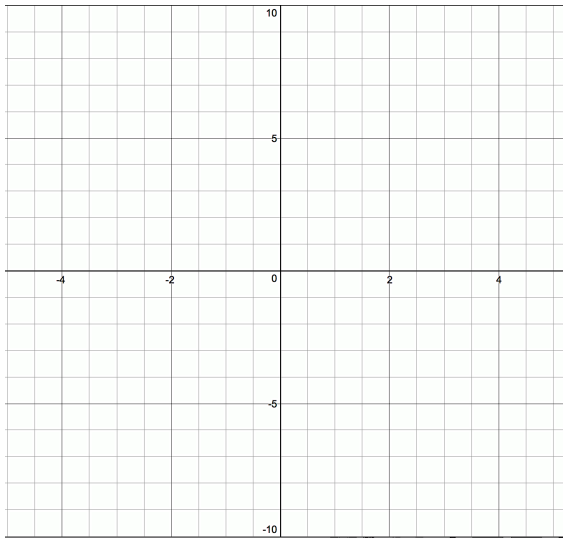
11. $(5x^2 + 7x + 2) - (3x^2 + 6x + 2)$
12. $(10x^4 + 2x^2 + 1) - (3x^4 + 3x + 11)$
13. $(7x^3 - 3x + 7) - (4x^2 - 3x - 11)$
14. $(x^4 - 1) - (x^4 + 1)$

Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

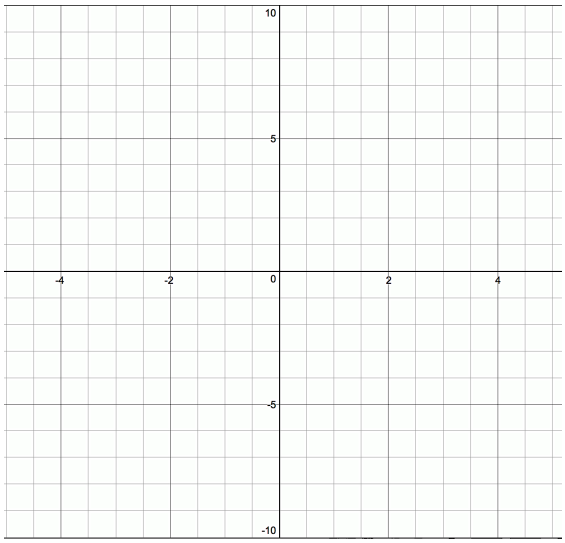
© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

Grafica.

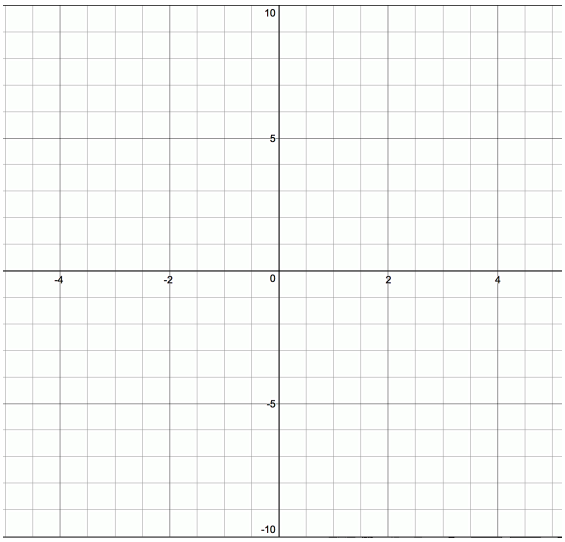
15. $y = x^3 - 2$



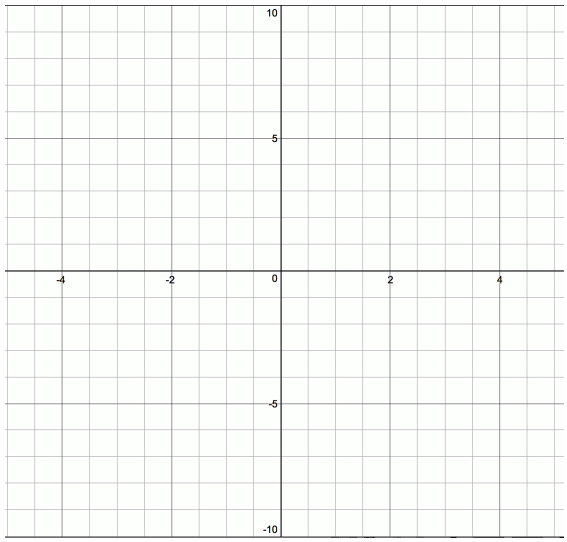
16. $y = x^3 + 1$



17. $y = (x - 3)^3$



18. $y = (x + 1)^3$



RENDIMIENTO

Tema: Uso de reglas de exponentes para combinar expresiones.

Simplifica.

19. $x^{7/8} \cdot x^{1/4} \cdot x^{-1/2}$

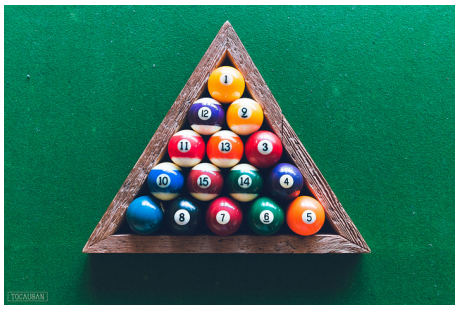
20. $x^{3/16} \cdot x^{-7/8} \cdot x^{3/4}$

21. $x^{4/7} \cdot x^{2/9} \cdot x^{-1/3}$

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

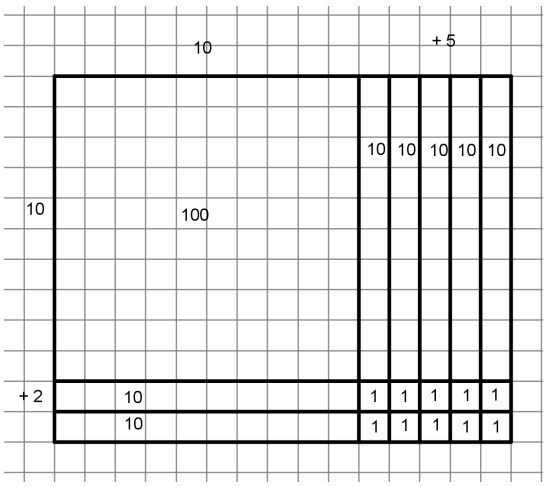
3.4 El Orgullo de Pascal

Actividad para Consolidar Comprensión



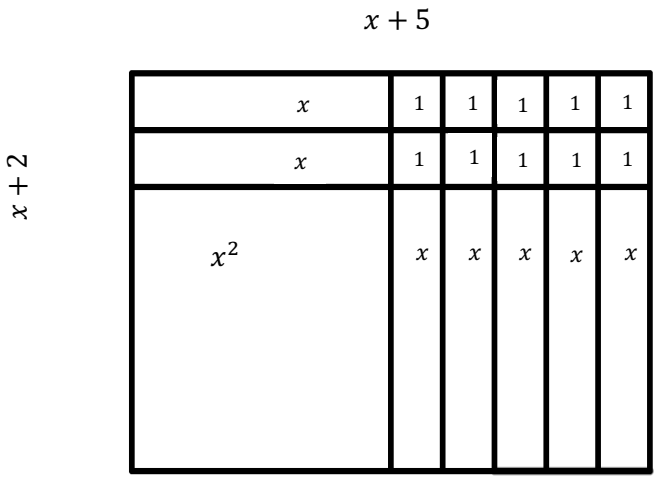
CC BY tocausan
https://flic.kr/p/rcvGgn

Multiplicar polinomios puede requerir un poco de habilidad en el departamento de álgebra, pero como los polinomios están estructurados como números, la multiplicación funciona de manera muy similar. Cuando aprendiste a multiplicar números, a lo mejor aprendiste a usar un modelo de área. Para multiplicar 12 × 15, el modelo de área y el procedimiento relacionado probablemente se verían así:



$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ \underline{15} \\ 10 \\ 50 \\ +\ 20 \\ \underline{100} \\ \mathbf{180} \end{array}$$

Puede que hayas usado esta misma idea con expresiones cuadráticas. Los modelos de área nos ayudan a pensar en multiplicar, factorizar y completar el cuadrado para encontrar expresiones equivalentes. Modelamos $(x+2)(x+5) = x^2 + 7x + 10$ como el área de un rectángulo con lados de longitud x + 2 y x + 5. Las diversas partes del rectángulo se muestran en el diagrama a continuación:



Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

A algunas personas les gusta abreviar un poco el modelo de área para tener secciones de área que correspondan a la longitud de los lados. En este caso, podrían dibujar lo siguiente.

	x	$+5$
x	x^2	$5x$
$+2$	$2x$	10

$$= x^2 + 7x + 10$$

1. ¿En qué propiedad se basan todos estos modelos?

2. Ahora que se te ha recordado el pasado feliz, estás listo para usar la estrategia que elijas para encontrar expresiones equivalentes para cada uno de los siguientes:
   a) $(x+3)(x+4)$ b) $(x+7)(x-2)$

Tal vez ahora recuerdes algunas de las diferentes formas para expresiones cuadráticas: forma factorizada y forma estándar. Estas formas existen para todos los polinomios, aunque a medida que los poderes aumentan, el álgebra puede volverse un poco más complicada. En forma estándar, los polinomios se escriben de modo que los términos estén en orden con el término de mayor potencia primero y luego los términos de menor potencia. Algunos ejemplos:

Cuadrática: $x^2 - 3x + 8$ o $x^2 - 9$

Cúbica: $2x^3 + x^2 - 7x - 10$ o $x^3 - 2x^2 + 15$

Cuadrática: $x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x + 4$

Con suerte, también recuerdas que debes asegurarte de que cada término en el primer factor se multiplique por cada término en el segundo factor y que los términos similares se combinan para obtener la forma estándar. Puedes usar modelos de área, cajas o acrónimos como FOIL (primero, exterior, interior, último; por sus siglas en inglés) para ayudarte a organizar, o simplemente puedes

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

verificar cada vez para asegurarte de que tienes todas las combinaciones Puede ser más desafiante con polinomios de mayor potencia, pero el principal es el mismo porque se basa en la poderosa Propiedad Distributiva.

3. La estrategia favorita de Tia para multiplicar polinomios es hacer una caja que se ajuste a los dos factores. Ella lo configura así: $(x+2)(x^2-3x+5)$

	x^2	$-3x$	$+5$
x			
$+2$			

Intenta usar el método de la caja de Tia para multiplicar estos dos factores juntos y luego combina los términos semejantes para obtener un polinomio en forma estándar.

4. Intenta verificar tu respuesta graficando el polinomio factorizado original, $(x+2)(x^2-3x+5)$ y luego graficando el polinomio que es tu respuesta. Si las gráficas son iguales, ¡tienes razón porque las dos expresiones son equivalentes! Si no son iguales, revisa tu trabajo y haz las correcciones necesarias.

5. La estrategia favorita de Tehani es conectar los términos que necesita multiplicar en orden, así:

$$(x-3)(x^2+4x-2)$$

Intenta multiplicar usando la estrategia de Tehani y luego verifica tu trabajo graficando. ¡Haz las correcciones que necesites y averigua por qué son necesarias para que no cometas el mismo error dos veces!

6. Usa la estrategia de tu elección para multiplicar cada una de las siguientes expresiones. Revisa tu trabajo graficando y haz las correcciones necesarias.
   a) $(x+5)(x^2-x-3)$ b) $(x-2)(2x^2+6x+1)$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

c) $(x+2)(x-2)(x+3)$

Al graficar, a menudo es útil tener un cuadrado perfecto o un cubo perfecto. A veces, también es útil tener estas funciones escritas en forma estándar. Intentemos volver a escribir algunas expresiones relacionadas para ver si podemos ver algunos patrones útiles.

7. Multiplica y simplifica las dos expresiones siguientes utilizando la estrategia que elijas:

a) $f(x) = (x+1)^2$ b) $f(x) = (x+1)^3$

Revisa tu trabajo graficando y haz las correcciones necesarias.

8. Algunos jóvenes matemáticos emprendedores notaron una conexión entre los coeficientes de los términos en el polinomio y el patrón numérico conocido como Triángulo de Pascal. Pon tus respuestas del problema 5 en la tabla. Compara tus respuestas con los números en el Triángulo de Pascal a continuación y describe la relación que ves.

$(x+1)^0$	1	1
$(x+1)^1$	$x+1$	1 1
$(x+1)^2$		1 2 1
$(x+1)^3$		1 3 3 1
$(x+1)^4$		

9. Podrías ahorrar algo de tiempo en multiplicar los polinomios de mayor potencia si pudiéramos usar el Triángulo de Pascal para obtener los coeficientes. Primero, debemos construir nuestro propio Triángulo de Pascal y agregar filas cuando lo necesitemos. Mira el Triángulo de Pascal y ve si puedes averiguar cómo obtener la siguiente fila usando los términos de la fila anterior. Usa tu método para encontrar los términos en la siguiente fila de la tabla de arriba.

10. Ahora puedes revisar el triángulo de Pascal multiplicando $(x+1)^4$ y comparando los coeficientes. Sugerencia: es posible que desees hacer tu trabajo más fácil utilizando tus respuestas del # 7 de alguna manera. Pon tu respuesta en la tabla de arriba.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

11. Asegúrate de que la respuesta que obtienes al multiplicar $(x+1)^4$ y los números en el Triángulo de Pascal coincidan, de modo que estés seguro de que tienes las dos respuestas correctas. Luego, describe cómo obtener la siguiente fila en el Triángulo de Pascal usando los términos de la fila anterior.

12. Completa la siguiente fila del triángulo de Pascal y úsala para encontrar la forma estándar de $(x+1)^5$. Escribe tus respuestas en la tabla del # 6.

13. El Triángulo de Pascal no sería muy útil si solo funcionara para expandir poderes de $x+1$. Debe haber una forma de usarlo para otras expresiones. La siguiente tabla muestra el Triángulo de Pascal y la expansión de $x+a$.

$(x+a)^0$	1	1
$(x+a)^1$	$x+a$	1 1
$(x+a)^2$	$x^2+2ax+a^2$	1 2 1
$(x+a)^3$	$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$	1 3 3 1
$(x+a)^4$	$x^4+4ax^3+6a^2x^2+3a^3x+a^4$	1 4 6 4 1

¿Qué observas acerca de lo que sucede con la a en cada uno de los términos seguidos?

14. Usa el método del triángulo de Pascal para encontrar la forma estándar para $(x+2)^3$. Comprueba tu respuesta multiplicando.

15. Usa cualquier método para escribir cada uno de los siguientes en forma estándar:

a) $(x+3)^3$ b) $(x-2)^3$ c) $(x+5)^4$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO | Nombre | Periodo | Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Recordando el significado de la división.

1. Dado: $f(x) = (x+7)(2x-3)$ y $g(x) = (x+7)$. Encuentra $g(x)\overline{)f(x)}$.

2. Dado: $f(x) = (5x+7)(-3x+11)$ y $g(x) = (-3x+11)$. Encuentra $g(x)\overline{)f(x)}$

3. Dado: $f(x) = (x+2)(x^2+3x+2)$ y $g(x) = (x+2)$ Encuentra $g(x)\overline{)f(x)}$

4. Dado: $f(x) = (5x-3)(x^2-11x-9)$ y $g(x) = (5x-3)$ y $h(x) = (x^2-11x-9)$.

   a.) Encuentra $g(x)\overline{)f(x)}$ b.) Encuentra $h(x)\overline{)f(x)}$

5. Dado: $f(x) = (5x-6)(2x^2-5x+3)$ y $g(x) = (x-1)$ y $h(x) = (2x-3)$.

   a.) Encuentra $g(x)\overline{)f(x)}$ b.) Encuentra $h(x)\overline{)f(x)}$

PRÁCTICA

Tema: Multiplicando polinomios

Multiplica. Escribe tus respuestas en forma estándar.

6. $(a+b)(a+b)$

7. $(x-3)(x^2+3x+9)$

8. $(x-5)(x^2+5x+25)$

9. $(x+1)(x^2-x+1)$

10. $(x+7)(x^2-7x+49)$

11. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

$(x+a)^0$	1	1
$(x+a)^1$	$x+a$	$1 \quad 1$
$(x+a)^2$	$x^2+2ax+a^2$	$1 \quad 2 \quad 1$
$(x+a)^3$	$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
$(x+a)^4$	$x^4+4ax^3+6a^2x^2+3a^3x+a^4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$

Usa la tabla de arriba para escribir cada una de las siguientes funciones en forma estándar.

12. $(x+1)^5$

13. $(x-5)^3$

14. $(x-1)^4$

15, $(x+4)^3$

16. $(x+2)^4$

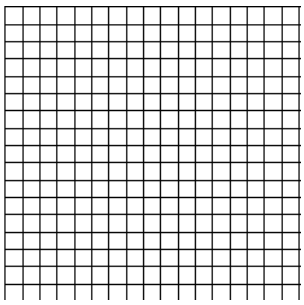
17. $(3x+1)^3$

RENDIMIENTO

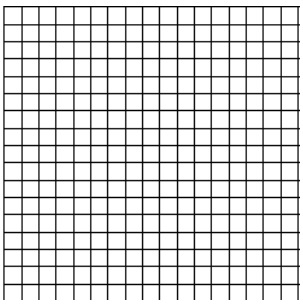
Examinar transformaciones en diferentes tipos de funciones

Grafica las siguientes funciones.

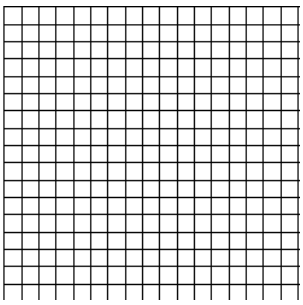
18. $g(x)=x+2$



19. $h(x)=x^2+2$

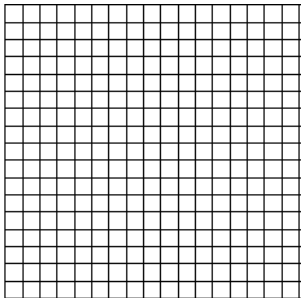


20. $f(x)=2^x+2$

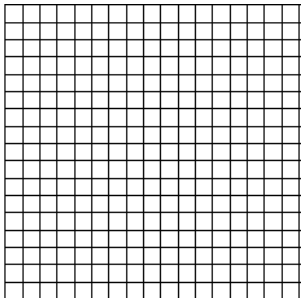


© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

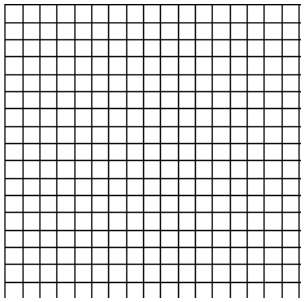
21. $g(x) = 3(x-2)$



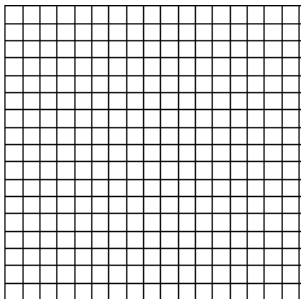
22. $h(x) = 3(x-2)^2$



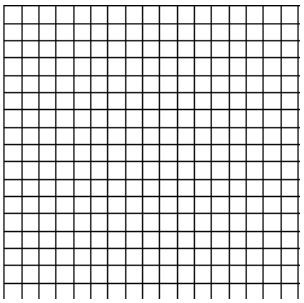
23. $f(x) = 3\sqrt{x-2}$



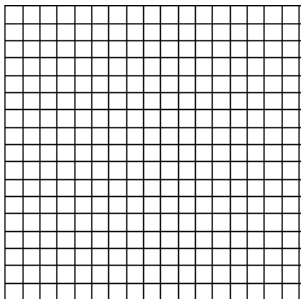
24. $g(x) = \frac{1}{2}(x-1) - 2$



25. $h(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$



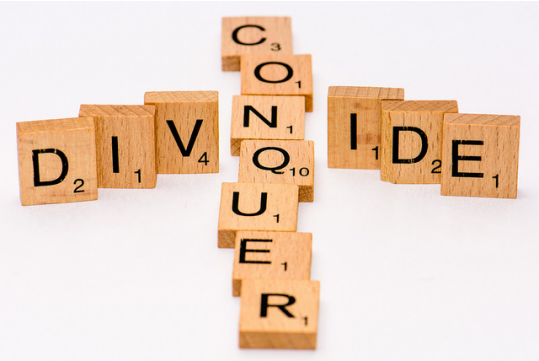
26. $f(x) = |x-1| - 2$



© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

3.5 Dividir y Conquistar

Actividad para Consolidar Comprensión



CC BY Nicola
https://flic.kr/p/wFMVNR

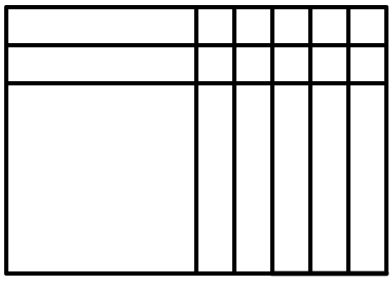
Hemos visto cómo los números y los polinomios se relacionan en la suma, la resta y la multiplicación. Ahora estamos listos para considerar la división.

¿División dices? ¿Como división larga? Sí, de eso estamos hablando. ¡Espera, no juzgues todavía! En realidad, el tema es bastante bueno.

Como de costumbre, comencemos observando cómo funciona la operación con números. Dado que la división es la operación inversa de la multiplicación, los mismos modelos deberían ser útiles. El modelo de área que usamos con la multiplicación también se usa con la división. Cuando estábamos usando modelos de área para factorizar una expresión cuadrática, en realidad estábamos dividiendo.

Vamos a repasar eso un poco.

1. El modelo de área para $x^2 + 7x + 10$ se muestra a continuación:



Usa el modelo de área para escribir $x^2 + 7x + 10$ en forma factorizada.

2. También utilizamos patrones numéricos para factorizar sin dibujar el modelo de área. Usa cualquier estrategia para factorizar los siguientes polinomios cuadráticos:

a) $x^2 + 7x + 12$	b) $x^2 + 2x - 15$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

c) $x^2 - 11x + 24$	d) $x^2 - 5x - 36$

Factorizar funciona muy bien para ecuaciones cuadráticas y algunos casos especiales de otros polinomios. Veamos una versión más general de la división que se parece mucho a lo que hacemos con los números. Digamos que queremos dividir 1452 entre 12. Si escribimos el problema de la división polinómica análoga, sería:

$$(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) \div (x + 2)$$

Usemos el proceso de división para los números para crear un proceso de división para polinomios. (No te asustes, de muchas maneras es más fácil con polinomios que con números).

Paso 1: Comienza escribiendo el problema como división larga. El polinomio necesita tener los términos escritos en orden descendente. Si faltan poderes, es más fácil si les dejas un poco de espacio.

$$12\overline{)1452} \qquad\qquad x+2\overline{)x^3+4x^2+5x+2}$$

Paso 2: Determina por qué podrías multiplicar el divisor para obtener el primer término del dividendo.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12\overline{)1452} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} x^2 \\ x+2\overline{)x^3+4x^2+5x+2} \end{array}$$

Paso 3: Multiplica y coloca el resultado debajo del dividendo.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12\overline{)1452} \\ \underline{-1200} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} x^2 \\ x+2\overline{)x^3+4x^2+5x+2} \\ -(\underline{x^3+2x^2}) \end{array}$$

Paso 4: Resta. (Ayuda mantener los signos correctos si cambias el signo en cada término y sumas el polinomio).

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12\overline{)1452} \\ \underline{-1200} \\ 252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 \\ x+2\overline{)x^3+4x^2+5x+2} \\ +(\underline{-x^3-2x^2\qquad}) \\ 2x^2+5x+2 \end{array}$$

Paso 5: Repite el proceso con el número o expresión que permanece en el dividendo.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 12\overline{)1452} \\ \underline{-1200} \\ 252 \\ \underline{-240} \\ 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2+2x \\ x+2\overline{)x^3+4x^2+5x+2} \\ +(\underline{-x^3-2x^2\qquad}) \\ 2x^2+5x+2 \\ \underline{-(2x^2+4x\quad)} \\ x+2 \end{array}$$

Paso 6: Continúa hasta que el número o la expresión que permanece sea más pequeño que el divisor.

$$\begin{array}{r} 121 \\ 12\overline{)1452} \\ \underline{-1200} \\ 252 \\ \underline{-240} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2+2x+1 \\ x+2\overline{)x^3+4x^2+5x+2} \\ +(\underline{-x^3-2x^2\qquad}) \\ 2x^2+5x+2 \\ \underline{-(2x^2+4x\quad)} \\ x+2 \\ \underline{-(x+2)} \\ 0 \end{array}$$

En este caso, 121 dividido por 12 no deja remanente, por lo que diríamos que 12 es un factor de 121. Del mismo modo, ya que $(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$ dividido por $(x + 2)$ no deja ningún remanente, diríamos que $(x + 2)$ es un factor de $(x^3 + 4x^2 + 5x + 2)$.

La división de polinomios no siempre coincide perfectamente con un problema de números enteros análogos, pero el proceso es siempre el mismo. Vamos a intentarlo.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

3. Use la división larga para determinar si $(x-1)$ es un factor de $(x^3-3x^2-13x+15)$. No te preocupes, los pasos para el proceso de división son los siguientes:

   a) Escribe el problema como división larga.
   b) ¿Por qué tienes que multiplicar x por para obtener x^3? Escribe tu respuesta.
   c) Multiplica tu respuesta del paso b por $(x-1)$ y escribe tu respuesta debajo del dividendo.
   d) Resta. Ten cuidado de restar cada término. (Es posible que desees cambiar los signos y sumar)
   e) Repite los pasos a-d hasta que la expresión que queda sea menor que $(x-1)$.

Esperamos que hayas sobrevivido al proceso de división.
¿Es $(x-1)$ un factor de $(x^3-3x^2-13x+15)$? _____

4. Trata otra vez. Usa la división larga para determinar si $(2x+3)$ es un factor de $2x^3+7x^2+2x+9$. No hay pistas esta vez. ¡Puedes hacerlo!

Al dividir números, hay varias formas de lidiar con el remanente. A veces, simplemente lo escribimos así:

$$3\overline{)\ 25}\ \ 8\,r.1 \quad \text{porque } 3(8)+1=25$$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Tal vez recuerdes también escribir el remanente como una fracción como esta:

$$3\overline{)\ 25}^{\,8\,1/3} \text{ porque } 3\left(8\tfrac{1}{3}\right) = 25$$

Hacemos lo mismo con polinomios.

Tal vez descubriste que $(2x^3 + 7x^2 + 2x + 9) \div (2x + 3) = (x^2 + 2x - 2)\ r.15$. (Eso esperamos). Puedes usarlo para escribir dos enunciados de multiplicación:

$$(2x + 3)(x^2 + 2x - 2) + 15 = (2x^3 + 7x^2 + 2x + 9)$$

y

$$(2x + 3)(x^2 + 2x - 2 + \frac{15}{2x + 3}) = (2x^3 + 7x^2 + 2x + 9)$$

5. Divide cada uno de los siguientes polinomios. Escribe las dos declaraciones de multiplicación que van con tus respuestas si hay un remanente. Escribe solo una declaración de multiplicación si el divisor es un factor. Utiliza una calculadora para gráficas para verificar tu trabajo y hacer las correcciones necesarias.

	a) $(x^3 + 6x^2 + 13x + 12) \div (x + 3)$	b) $(x^3 - 4x^2 + 2x + 5) \div (x - 2)$
Declaraciones de multiplicación:		

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

	c) $(6x^3 - 11x^2 - 4x + 5) \div (2x - 1)$	d) $(x^4 - 23x^3 + 49x + 4) \div (x^2 + x + 2)$
Declaraciones de multiplicación:		

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Resolver ecuaciones lineales

Resuelve *x*.

1. $5x + 13 = 48$
2. $\frac{1}{3}x - 8 = 0$
3. $-4 - 9x = 0$
4. $x^2 - 16 = 0$
5. $x^2 + 4x + 3 = 0$
6. $x^2 - 5x + 6 = 0$
7. $(x + 8)(x + 11) = 0$
8. $(x - 5)(x - 7) = 0$
9. $(3x - 18)(5x - 10) = 0$

PRÁCTICA

Tema: Dividir polinomios

Divide cada uno de los siguientes polinomios. Escribe solo una declaración de multiplicación si el divisor es un factor. Escribe las dos declaraciones de multiplicación que vayan con tus respuestas, si hay un remanente.

10. $(x+1)\overline{)x^3 - 3x^2 + 6x + 11}$

11. $(x-5)\overline{)x^3 - 9x^2 + 23x - 15}$

Declaración (es) de multiplicación

Declaración (es) de multiplicación

Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

12. $(2x-1)\overline{)2x^3+15x^2-34x+13}$

Declaración (es) de multiplicación

13. $(x+4)\overline{)x^3+13x^2+26x-25}$

Declaración (es) de multiplicación

14. $(x+7)\overline{)x^3-8x^2-111x+10}$

Declaración (es) de multiplicación

15. $(3x-4)\overline{)3x^3+23x^2+6x-28}$

Declaración (es) de multiplicación

RENDIMIENTO

Tema: Describir las características de una variedad de funciones

Grafica las siguientes funciones. Luego identifica las características clave de las funciones. Incluye dominio, rango, intervalos donde la función aumenta/disminuye, intersecciones, máximo/mínimo y comportamiento final.

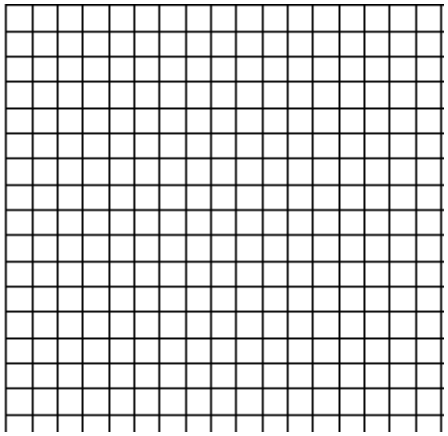
© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

16. $f(x) = x^2 - 9$

dominio: rango:

aumenta: disminuye:

intersección de y: intersección(es) de x:

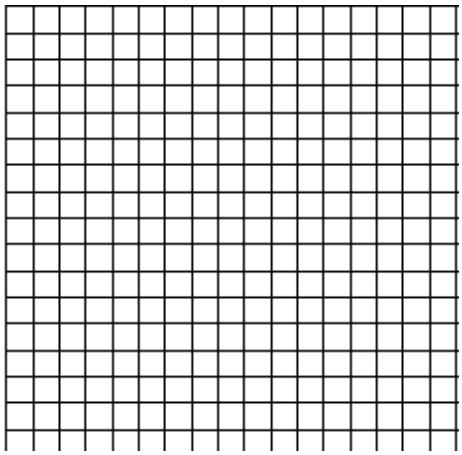


17. $f(n-1) = f(n) + 3;\ f(1) = 4$

dominio: rango:

aumenta: disminuye:

intersección de y: intersección(es) de x:

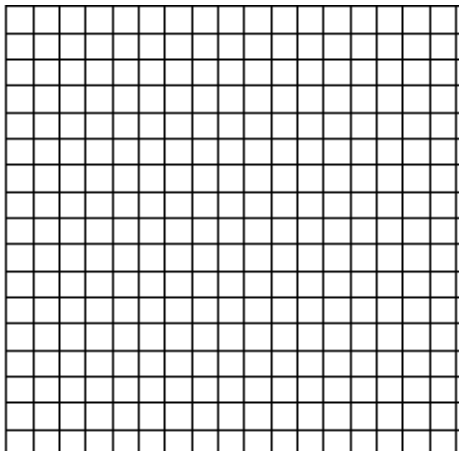


18. $f(x) = \sqrt{x-3} + 1$

dominio: rango:

aumenta: disminuye:

intersección de y: intersección(es) de x:



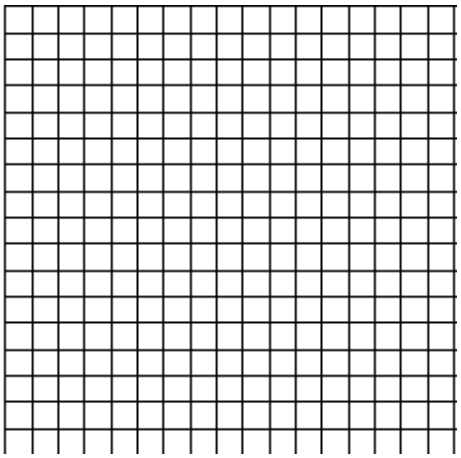
© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

19. $f(x) = log_2 x - 1$

dominio: rango:

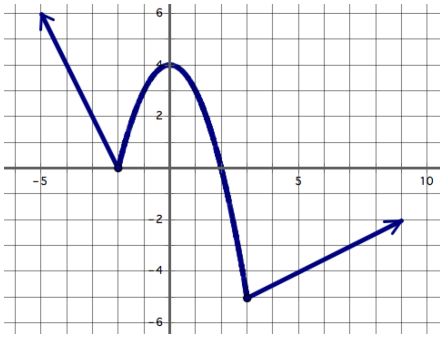
aumenta: disminuye:

intersección de y: intersección(es) de x:



Identificar las características clave de las funciones gráficas.

20.

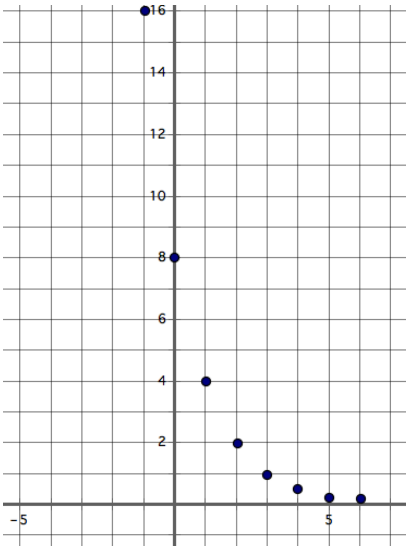


dominio: rango:

aumenta: disminuye:

intersección de y: intersección(es) de x:

21.



dominio: rango:

aumenta: disminuye:

intersección de y: intersección(es) de x:

Need help? Visit **www.rsgsupport.org**

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

3.6 Lo sentimos, está cerrado

Actividad para Practicar Comprensión

CC BY Antti T. Nissinen
https://flic.kr/p/drlVTU

Ahora que hemos comparado las operaciones en polinomios con operaciones en números enteros, es hora de generalizar sobre los resultados. Antes de ir demasiado lejos, necesitamos
una definición técnica de una función polinómica. Aquí está:

Una función polinómica tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ son números reales y n es un número entero no negativo. En otras palabras, un polinomio es la suma de uno o más monomios con coeficientes reales y exponentes enteros no negativos. El grado de la función polinómica es el valor más alto para n donde a_n no es igual a 0.

1. Los siguientes ejemplos y no ejemplos te ayudarán a ver las implicaciones importantes de la definición de una función polinómica. Para cada par, determina qué es diferente entre el ejemplo de un polinomio y el no-ejemplo que no es un polinomio.

Estos **son** polinomios:	Estos **no son** polinomios:
a) $f(x) = x^3$	b) $g(x) = 3^x$
¿Cómo son a y b diferentes?	
c) $f(x) = 2x^2 + 5x - 12$	d) $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-3x+2}$
¿Cómo son c y d diferentes?	
e) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x - 7$	$f)$ $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 10x^{-1} - 7$
¿Cómo son e y f diferentes?	
h) $f(x) = \frac{1}{2}x$	i) $g(x) = \frac{1}{2x}$
¿Cómo son h e i diferentes?	
j) $f(x) = x^2$	k) $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$
¿Cómo son j y k diferentes?	

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2. De acuerdo con la definición y los ejemplos anteriores, ¿cómo puedes saber si una función es una función polinómica?

Tal vez hayas notado en el pasado que cuando sumas dos números pares, la respuesta que obtienes es siempre un número par. Matemáticamente, decimos que el conjunto de números pares **es cerrado** bajo la suma. Los matemáticos están interesados en resultados como este porque nos ayuda a entender cómo se comportan los números o las funciones de un tipo en particular con las diversas operaciones.

3. Puedes probarlo tu mismo: ¿Es cerrado el conjunto de números impares bajo la multiplicación? En otras palabras, si multiplicas dos números impares, ¿obtendrás un número impar? Explica.

Si encuentras dos números impares que tienen un producto par, entonces dirías que los números impares no se cierran cuando se multiplican. Incluso si tienes una serie de ejemplos que apoyan la reclamación, si puedes encontrar un **contraejemplo** que contradiga la reclamación, entonces la reclamación es falsa.

Considera las siguientes afirmaciones y determina si son verdaderas o falsas. Si un reclamo es verdadero, da una razón con al menos dos ejemplos que ilustren el reclamo. Tus ejemplos pueden incluir cualquier representación que elijas. Si la reclamación es falsa, da una razón con un contraejemplo que demuestre que la reclamación es falsa.

4. El conjunto de números enteros se cierra bajo la adición.

5. La suma de una función cuadrática y una función lineal es una función cúbica.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

6. La suma de una función lineal y una función exponencial es un polinomio.

7. El conjunto de polinomios está cerrado bajo la adición.

8. El conjunto de números enteros se cierra bajo la resta.

9. El conjunto de enteros se cierra bajo la resta.

10. Una función cuadrática que se resta de una función cúbica es una función cúbica.

11. Una función lineal que se resta de una función lineal es una función polinómica.

12. Una función cúbica que se resta de una función cúbica es una función cúbica.

13. El conjunto de funciones polinómicas está cerrado bajo la resta.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

14. El producto de dos funciones lineales es una función cuadrática.

15. El conjunto de números enteros se cierra bajo la multiplicación.

16. El conjunto de polinomios está cerrado bajo la multiplicación.

17. El conjunto de números enteros está cerrado bajo la división.

18. Una función cúbica dividida por una función lineal es una función cuadrática.

19. El conjunto de funciones polinómicas está cerrado bajo la división.

20. Escribe dos afirmaciones propias sobre polinomios y usa ejemplos para demostrar que son verdaderos.

    Afirmación #1:

    Afirmación #2:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

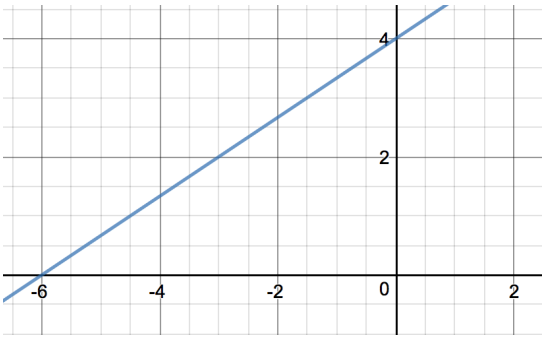
Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

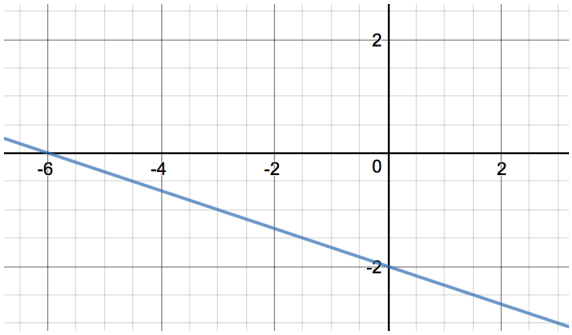
Tema: Conectar los ceros de una función a la solución de la ecuación

Cuando resolvemos ecuaciones, a menudo establecemos la ecuación igual cero y luego encontramos el valor de x. Otra forma de decir esto es "encontrar cuando $f(x) = 0$." Es por eso que llamamos soluciones a los ceros en las ecuaciones. Encuentra los ceros para las ecuaciones dadas. Luego marca la(s) solución(es) como un punto en la gráfica de la ecuación.

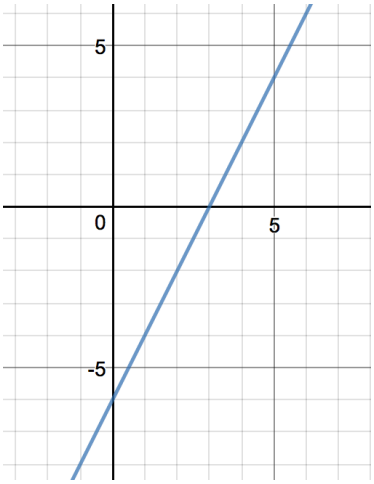
1. $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$



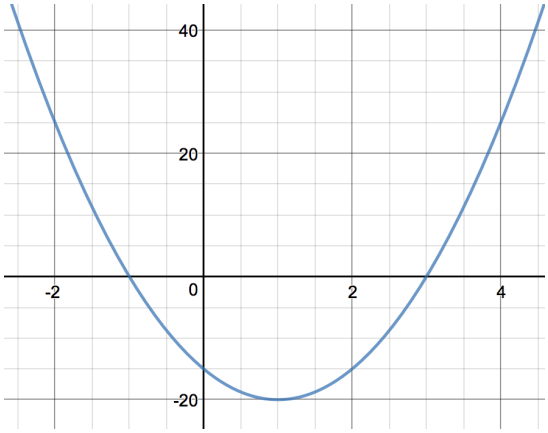
2. $g(x) = -\frac{1}{3}x - 2$



3. $h(x) = 2x - 6$

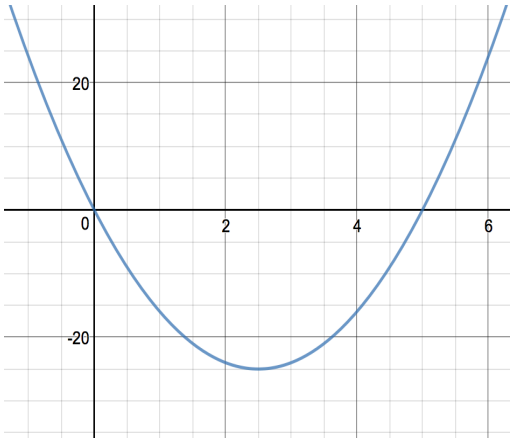


4. $p(x) = 5x^2 - 10x - 15$

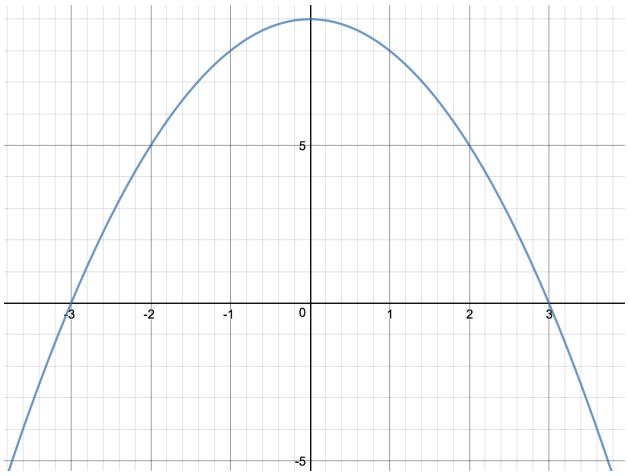


© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

5. $q(x) = 4x^2 - 20x$



6. $d(x) = -x^2 + 9$



PRÁCTICA

Tema: Explorando conjuntos de números matemáticos cerrados

Identifica las siguientes afirmaciones como *a veces verdaderas, siempre ciertas o nunca verdaderas.* Si tu respuesta a veces es verdadera, da un ejemplo de cuándo es verdadera y un ejemplo de cuándo no es verdadera. Si nunca es cierto, da un contraejemplo.

7. El producto de un número entero y un número entero es un número entero.

8. El cociente de un número entero dividido por un número entero es un número entero.

9. El conjunto de enteros está **cerrado** por la división.

10. La diferencia de una función lineal y una función lineal es un número entero.

11. La diferencia de una función lineal y una función cuadrática es una función lineal.

12. El producto de una función lineal y una función lineal es una función cuadrática.

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

13. La suma de una función cuadrática y una función cuadrática es una función polinómica.

14. El producto de una función lineal y una función cuadrática es una función cúbica.

15. El producto de tres funciones lineales es una función cúbica.

16. El conjunto de funciones polinómicas está **cerrado** por la suma.

RENDIMIENTO

Tema: Identificación de pares conjugados.

Un **par conjugado** es simplemente un par de binomios que tienen los mismos números, pero difieren al tener signos opuestos entre ellos. Por ejemplo $(a + b)$ y $(a - b)$ son pares conjugados. Probablemente lo hayas notado cuando has factorizado una expresión cuadrática que es la diferencia de dos cuadrados. Ejemplo: $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$. Los dos factores $(x + 5)(x - 5)$ son pares conjugados.

La fórmula cuadrática $\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b} \pm \sqrt{\boldsymbol{b}^2 - 4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$ puede generar ambas soluciones a una ecuación cuadrática debido a los signos ± ubicados en el numerador de la fórmula. Cuando la parte $\sqrt{b^2 - 4ac}$ de la fórmula genera un número irracional (**por ejemplo**, $\sqrt{2}$) o un número imaginario (**por ejemplo,** $2i$), la fórmula produce un par de números que son conjugados. Esto es importante porque este tipo de solución a una ecuación cuadrática siempre viene en pares. **Ejemplo:** El conjugado de $(3 + \sqrt{2})$ *es* $(3 - \sqrt{2})$. El conjugado de $(-2i)$ es $(+2i)$.
Piensa en ello como $(0 - 2i)$ *y* $(0 + 2i)$. Cambia solo el signo entre los dos números.

Escribe el conjugado del valor dado.

17. $(8 + \sqrt{5})$

18. $(11 + 4i)$

19. $9i$

20. $-5\sqrt{7}$

21. $(2 - 13i)$

22. $(-1 - 2i)$

23. $(-3 + 5\sqrt{2})$

24. $-4i$

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

3.7 Construyendo Raíces Fuertes

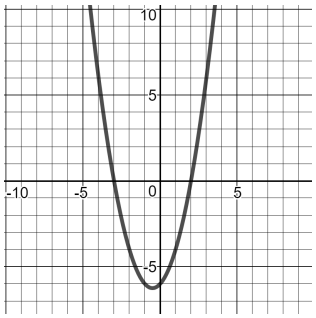
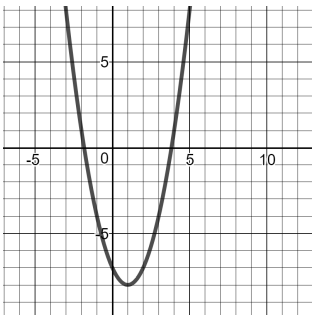
Actividad para Consolidar Comprensión

CC BY Rob Lee
https://flic.kr/p/5p4BR

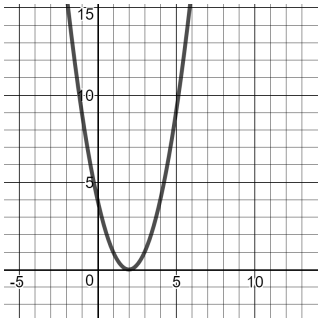
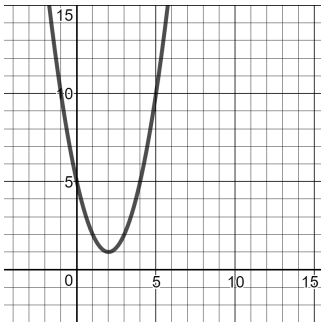
Al trabajar con funciones cuadráticas, aprendimos el teorema fundamental de álgebra:
Una función polinómica de n^{th} grado tiene n raíces.
En esta tarea, exploraremos más esta idea con otras funciones polinómicas.

Primero, vamos a repasar lo que aprendimos sobre las funciones cuadráticas. Las ecuaciones y gráficas de cuatro ecuaciones cuadráticas diferentes se dan a continuación. Encuentra las raíces para cada una e identifica si las raíces son reales o imaginarias.

1.

a) $f(x) = x^2 + x - 6$ 	b) $g(x) = x^2 - 2x - 7$ 
Raíces:	Raíces:
Tipos de raíces:	Tipos de raíces:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$ 	d) $k(x) = x^2 - 4x + 5$ 
Raíces:	Raíces:
Tipos de raíces:	Tipos de raíces:

2. ¿Todas las funciones cuadráticas tienen 2 raíces, según lo predicho por el teorema fundamental de álgebra? Explica.

3. Siempre es importante mantener lo que has aprendido anteriormente en tu bolsa de trucos matemáticos para que puedas extraerlo cuando lo necesites. ¿Qué estrategias utilizaste para encontrar las raíces de las ecuaciones cuadráticas?

4. Usando tu trabajo del problema 1, escribe cada una de las ecuaciones cuadráticas en forma factorizada. Cuando termines, verifica tus respuestas haciendo una gráfica, cuando sea posible, y haz las correcciones necesarias.

a) $f(x) = x^2 + x - 6$	b) $g(x) = x^2 - 2x - 7$
Forma factorizada:	Forma factorizada:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

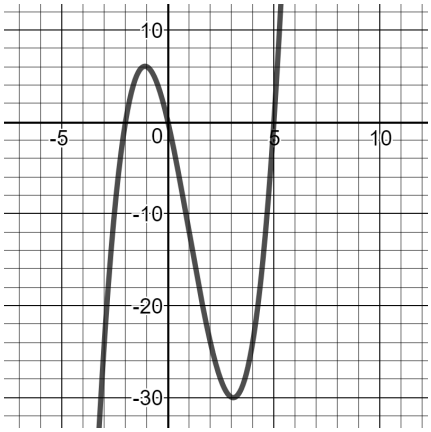
c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$	d) $k(x) = x^2 - 4x + 5$
Forma factorizada:	Forma factorizada:

5. Según tu trabajo en el problema 1, ¿dirías que las raíces es lo mismo que las intersecciones de x? Explica.

6. Según tu trabajo en el problema 4, ¿cuál es la relación entre las raíces y los factores?

Ahora echemos un vistazo más de cerca a las funciones cúbicas. Hemos trabajado con transformaciones de $f(x) = x^3$, pero lo que hemos visto hasta ahora es solo la punta del iceberg. Por ejemplo, considera:

$g(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$



7. Usa la gráfica para encontrar las raíces de la función cúbica. Usa la ecuación para verificar que estás en lo correcto. Muestra cómo has verificado cada raíz.

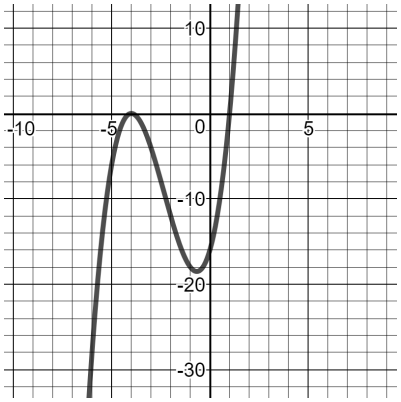
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

8. Escribe $g(x)$ en forma factorizada. Verifica que la forma factorizada sea equivalente a la forma estándar.

9. ¿Los resultados en el #7 son consistentes con el teorema fundamental de álgebra? Explica.

Aquí hay otro ejemplo de una función cúbica.

$$f(x) = x^3 + 7x^2 + 8x - 16$$



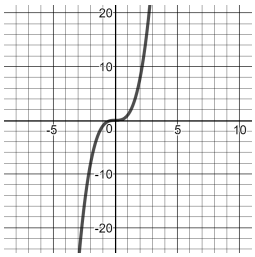
10. Usa la gráfica para encontrar las raíces de la función cúbica.

11. Escribe $f(x)$ en forma factorizada. Verifica que la forma factorizada sea equivalente a la forma estándar. Haz las correcciones necesarias.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

12. ¿Los resultados en el #10 son consistentes con el teorema fundamental de álgebra? Explica.

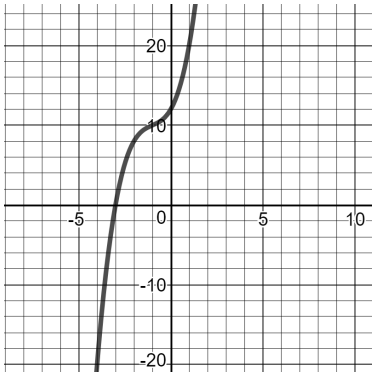
13. Hemos visto la función polinómica cúbica más básica, $h(x) = x^3$, sabemos que su gráfica se ve así:



Explica cómo $h(x) = x^3$ es consistente con el teorema fundamental de álgebra.

14. Aquí hay otra función polinómica cúbica para tu consideración. Notarás que se te da en forma factorizada. Usa la ecuación y la gráfica para encontrar las raíces de $p(x)$.

$$p(x) = (x + 3)(x^2 + 4)$$



15. Usa la ecuación para verificar cada raíz. Muestra tu trabajo a continuación.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

16. ¿Los resultados en el #14 son consistentes con el teorema fundamental de álgebra? Explica.

17. Explica cómo encontrar la forma factorizada de un polinomio, dadas las raíces.

18. Explica cómo encontrar las raíces de un polinomio, dada la forma factorizada.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Practicar división larga en polinomios

Divide usando división larga. (Estos problemas no tienen remanentes. Si obtienes uno, inténtalo de nuevo).

1. $(x+3)\overline{)5x^3+2x^2-45x-18}$

2. $(x-6)\overline{)x^3-x^2-44x+84}$

3. $(x-5)\overline{)3x^3-15x^2+12x-60}$

4. $(x+2)\overline{)x^4+6x^3+7x^2-6x-8}$

PRÁCTICA

Tema: Aplicar el Teorema Fundamental de Álgebra

Predice el número de raíces para cada una de las ecuaciones polinómicas dadas. (Recuerda que el Teorema Fundamental de Álgebra dice: Una función polinómica de grado n° tiene n raíces).

5. $a(x) = x^2 + 3x - 10$

6. $b(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

7. $c(x) = -2x - 4$

8. $d(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$

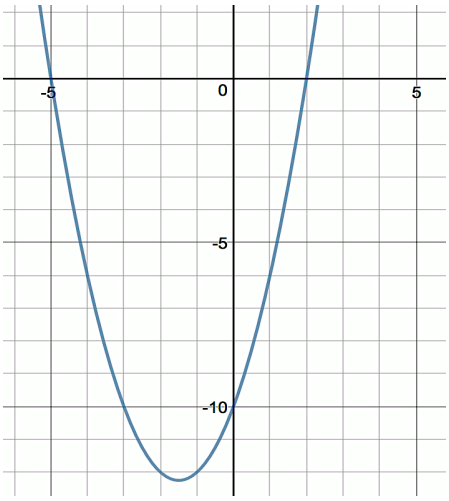
9. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

10. $g(x) = x^6 - 5x^4 + 4x^2$

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

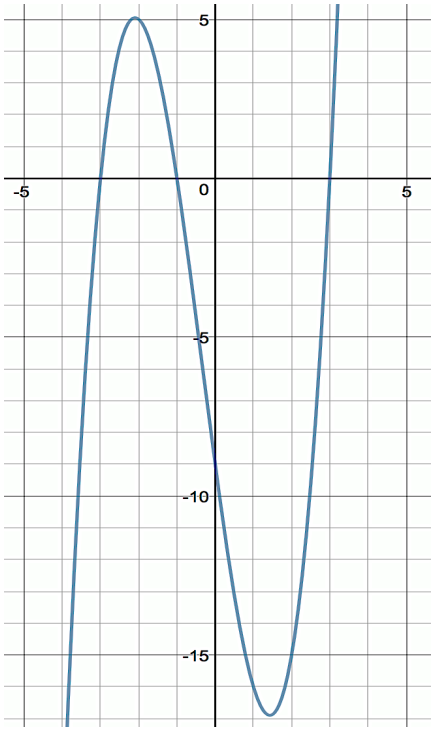
A continuación, se muestran las gráficas de los polinomios de la página anterior. Revisa tus predicciones. Luego usa la gráfica para ayudarte a escribir el polinomio en forma factorizada.

11. $a(x) = x^2 + 3x - 10$



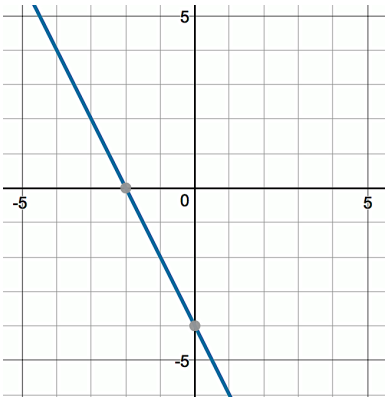
Forma factorizada:

12. $b(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$



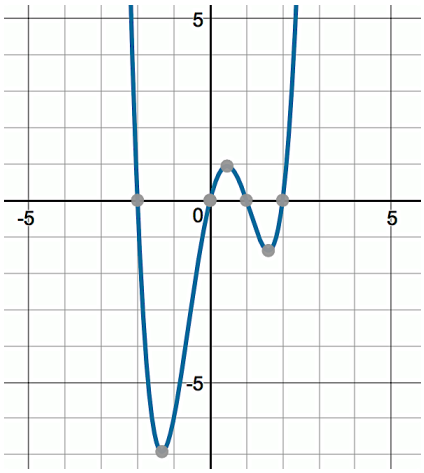
Forma factorizada:

13. $c(x) = -2x - 4$



Forma factorizada:

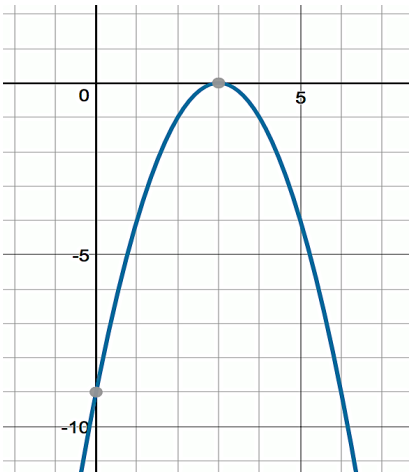
14. $d(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$



Forma factorizada:

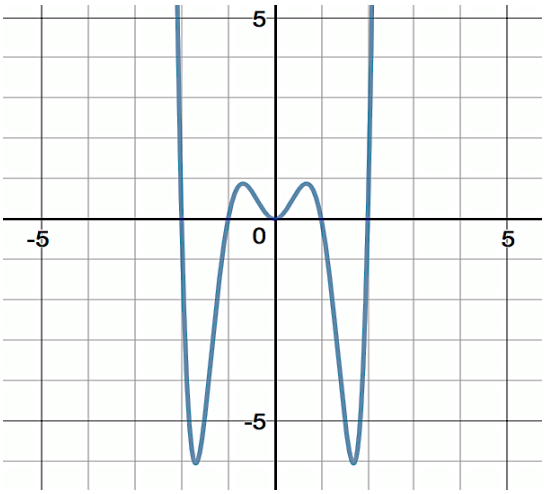
© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

15. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$



Forma factorizada:

16. $g(x) = x^6 - 5x^4 + 4x^2$



Forma factorizada:

17. Las gráficas de los #s 15 y 16 no parecen seguir el Teorema Fundamental de Álgebra, pero hay algo similar en cada una de las gráficas. Explica lo que está sucediendo en el punto (3, 0) en el # 15 y en el punto (0,0) en el # 16.

RENDIMIENTO

Tema: Resolver ecuaciones cuadráticas

Encuentra los ceros para cada ecuación usando la fórmula cuadrática.

18. $f(x) = x^2 + 20x + 51$

19. $f(x) = x^2 + 10x + 25$

20. $f(x) = 3x^2 + 12x$

21. $f(x) = x^2 - 11$

22. $f(x) = x^2 + x - 1$

23. $f(x) = x^2 + 2x + 3$

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

3.8 Llegando a la raíz del problema

Actividad para Consolidar Comprensión

CC BY Bergen Smilesnj
https://flic.kr/p/WrnPtZ

En la lección *3.7 Construyendo raíces fuertes,* aprendimos a predecir la cantidad de raíces de un polinomio usando el teorema fundamental de álgebra y la relación entre las raíces y los factores. En esta tarea, trabajaremos en cómo encontrar todas las raíces de un polinomio, dado en forma estándar.

Empecemos por pensar nuevamente en números y factores.

1. Si sabes que 7 es un factor de 147, ¿qué harías para encontrar la factorización prima de 147? Explica tu respuesta y muestra tu proceso aquí:

2. ¿En qué se parece tu respuesta a un polinomio escrito en la forma: $P(x) = (x-7)^2(x-3)$?

El proceso para encontrar factores de polinomios es exactamente igual al proceso para encontrar factores de números. Comenzamos dividiendo por un factor que conocemos y seguimos dividiendo hasta que tengamos todos los factores. Cuando el polinomio queda como función cuadrática, a veces podemos factorizarlo por inspección y, a veces, podemos usar otras herramientas cuadráticas, como la fórmula cuadrática.

¡Vamos a intentarlo! Para cada una de las siguientes funciones, se te ha dado un factor, utiliza ese factor para encontrar los factores restantes y las raíces de la función; escribe la función en forma factorizada.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

3. Función: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ Factor: $(x + 3)$ Raíces de la función:

Forma factorizada:

4. Función: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ Factor: $(x + 1)$ Raíces de la función:

Forma factorizada:

5. Función: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 15$ Factor: $(x - 5)$ Raíces de la función:

Forma factorizada:

6. Función: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 18$ Factor: $(x - 3)$ Raíces de la función:

Forma factorizada:

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

7. Función: $f(x) = x^4 - 16$ Factor: $(x - 2)$ Raíces de la función:

Forma factorizada:

8. Función: $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ Factor: $(x - 2i)$ Raíces de la función:

Forma factorizada:

9. ¿Es posible que un polinomio con coeficientes reales tenga solo una raíz imaginaria? Explica.

10. Basándote en el teorema fundamental de álgebra y los polinomios que has visto, haz una tabla que muestre todas las raíces y las posibles combinaciones de raíces reales e imaginarias para polinomios lineales, cuadráticos, cúbicos y polinomios de cuarto grado.

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

3.9 ¿Es esto el final?

Actividad para Consolidar Comprensión

CC BY Caitlin H
https://flic.kr/p/6S4Xqn

En cursos de matemáticas anteriores, has comparado y analizado tasas de crecimiento de funciones polinómicas (principalmente lineales y cuadráticas) y exponenciales. En esta tarea, vamos a analizar las tasas de cambio y el comportamiento final comparando varias expresiones.

Parte I: Ver patrones en el **comportamiento final.**

1. En la mayor cantidad de formas posibles, compara y contrasta funciones lineales, cuadráticas, cúbicas y exponenciales.

2. Usando la gráfica provista, escribe las siguientes funciones verticalmente, **de mayor a menor para x = 0.** Coloca la función con el valor mayor en la parte superior y la función con el valor menor en la parte inferior. Pon las funciones con los mismos valores al mismo nivel. Un ejemplo: $l(x) = x^7$, se ha colocado en la gráfica para comenzar.

$f(x) = 2^x$	$p(x) = x^3 + x^2 - 4$	$g(x) = x^2 - 20$
$h(x) = x^5 - 4x^2 + 1$	$k(x) = x + 30$	$m(x) = x^4 - 1$
$r(x) = x^5$	$n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$q(x) = x^6$

3. ¿Qué determina el valor de una función polinómica en $x = 0$? ¿Es esto cierto para otros tipos de funciones?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

4. Escribe las mismas expresiones en la gráfica en orden de mayor a menor cuando x represente un número muy grande (este número es tan grande, por lo que decimos que se está acercando al infinito positivo). Si el valor de la función es positivo, pon la función en el cuadrante 1. Si el valor de la función es negativo, pon la función en el cuadrante IV. Se ha colocado un ejemplo para ti.

5. ¿Qué es lo que determina el comportamiento final de una función polinómica para valores muy grandes de x?

6. Escribe las mismas funciones en orden **de mayor a menor** cuando x represente un número que se acerca al infinito negativo. Si el valor de la función es positivo, colócalo en el cuadrante II, si el valor de la función es negativo, colócalo en el cuadrante III. Se muestra un ejemplo en la gráfica.

7. ¿Qué patrones ves en las funciones polinómicas para valores de x que se aproximan al infinito negativo? ¿Qué patrones ves para las funciones exponenciales? Usa la tecnología haciendo gráficas, para probar estos patrones con algunos ejemplos más de tu elección.

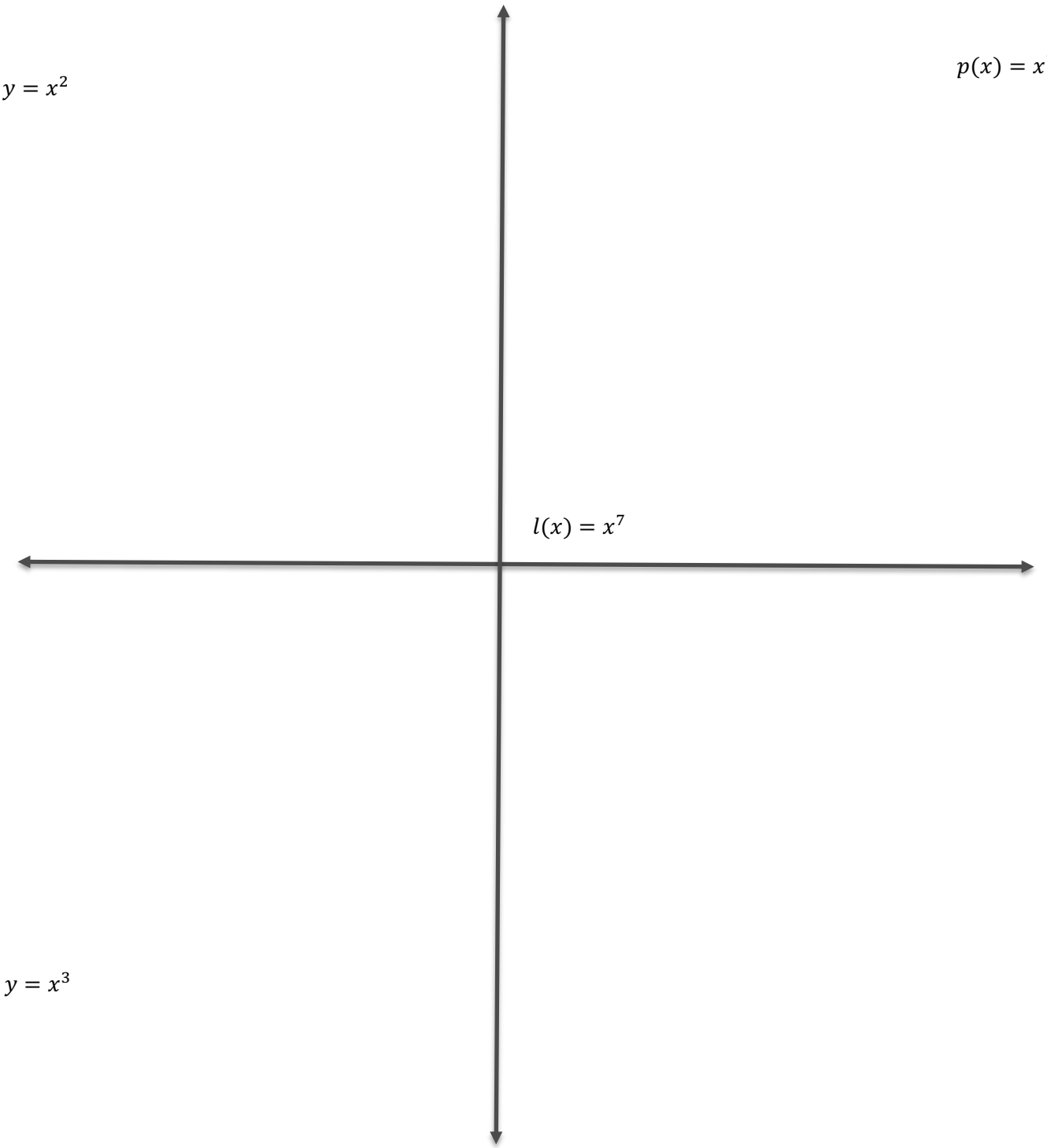
8. ¿Cómo cambiaría el comportamiento final de las funciones polinómicas si los términos principales se cambiaran de positivo a negativo?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

$\boldsymbol{x \to -\infty}$ $\boldsymbol{x = 0}$ $\boldsymbol{x \to \infty}$

$y = x^2$

$p(x) = x^7$



$y = x^3$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Parte II: Uso de patrones de comportamiento final.

Para cada situación:

- Determinar el tipo de función. Si es un polinomio, indica el grado del polinomio y si es un polinomio de grado uniforme o un polinomio de grado impar.
- Describir el comportamiento final basado en tu conocimiento de la función. Usa el formato:

Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____ y $\quad como\ x \rightarrow \infty\ f(x) \rightarrow$ _____

1. $f(x) = 3 + 2x$

   Tipo de función:

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

2. $f(x) = x^4 - 16$

   Tipo de función:

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

3. $f(x) = 3^x$

   Tipo de función:

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

4. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$

   Tipo de función:

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

5. $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - x + 5$

   Tipo de función:

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

6. $f(x) = log_2 x$

   Tipo de función:

   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

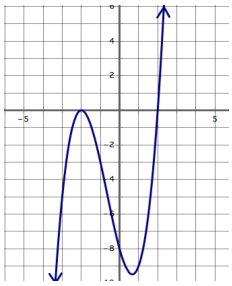
   Comportamiento final:

   Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Usa las gráficas a continuación para describir el comportamiento final de cada función completando las declaraciones.

7.



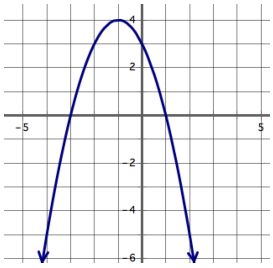
Comportamiento final:

Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

Comportamiento final:

Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

8.



Comportamiento final:

Como $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow$ _____

Comportamiento final:

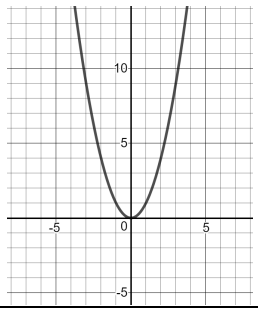
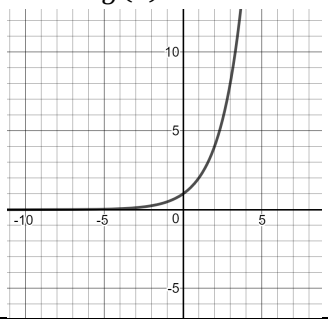
Como $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow$ _____

9. ¿Cómo se conecta el comportamiento final de las funciones cuadráticas con el número y el tipo de raíces de estas funciones? ¿Cómo se conecta el comportamiento final de las funciones cúbicas con el número y el tipo de raíces para las funciones cúbicas?

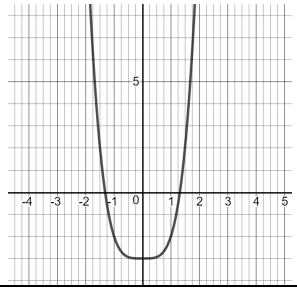
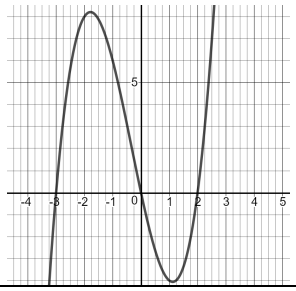
Parte III: Funciones pares e impares

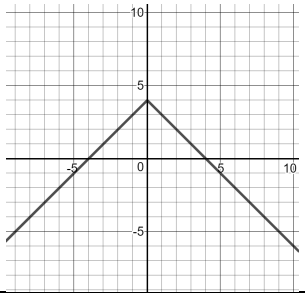
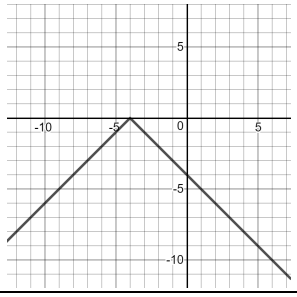
Algunas funciones que no son polinomios se pueden clasificar como funciones pares o funciones impares. Cuando los matemáticos dicen que una función es una función par, significa algo muy específico.

1. Veamos si puedes averiguar cuál es la definición de una función par con estos ejemplos:

Función par: $f(x) = x^2$ 	Función impar: $g(x) = 2^x$ 
Diferencias:	

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

Función par: $f(x) = x^4 - 3$ 	Función impar: $g(x) = x(x+3)(x-2)$ 
Diferencias:	

Función par: $f(x) = -\|x\| + 4$ 	Función impar: $g(x) = -\|x+4\|$ 
Diferencias:	
Función par: $f(2) = 5\ y\ f(-2) = 5$	Función impar: $g(2) = 3\ y\ g(-2) = 5$
Diferencias:	

2. ¿Qué observas acerca de las características de una función par?

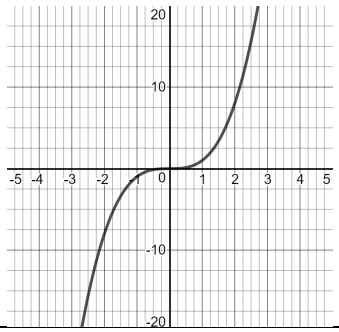
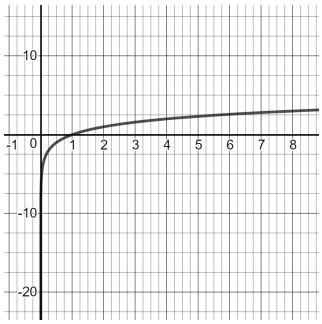
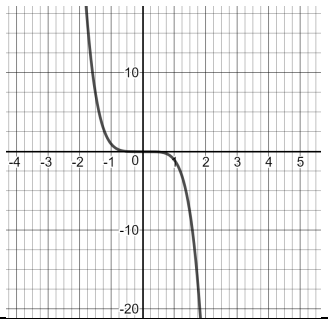
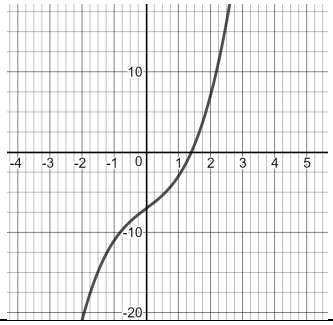
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

3. La definición algebraica de una función par es:
$f(x)$ es una función par si y solo si $f(x) = f(-x)$ para todos los valores de x en el dominio de f.

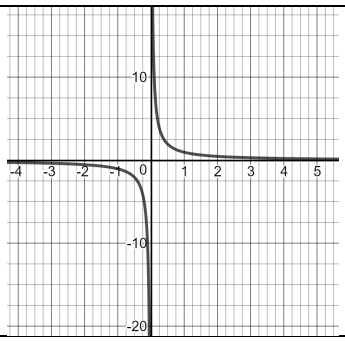
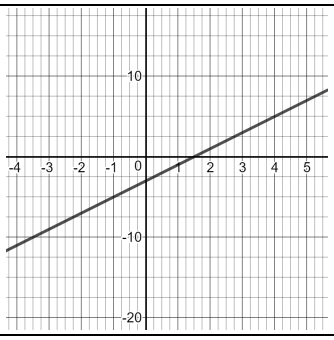
¿Cuáles son las implicaciones de la definición para la gráfica de una función par?

4. ¿Son todos los polinomios de grado par, funciones pares? Usa ejemplos para explicar tu respuesta.

5. Probemos el mismo enfoque para encontrar una definición para las funciones impares.

Función impar: $f(x) = x^3$ 	Función par: $g(x) = \log_2 x$ 
Diferencias:	
Función impar: $f(x) = -x^5$ 	Función par: $g(x) = x^3 + 3x - 7$ 
Diferencias:	
Función impar: $f(x) = \frac{1}{x}$	Función par: $g(x) = 2x - 3$

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

	
Diferencias:	
Función impar: $f(2) = 3 \; y \; f(-2) = -3$	Función par: $g(2) = 3 \; y \; g(-2) = 5$
Diferencias:	

6. ¿Qué observas acerca las características de una función impar?

7. La definición algebraica de una función impar es:
$f(x)$ es una función impar si y solo si $f(-x) = -f(x)$ para todos los valores de x en el dominio de f.

Explica cómo cada uno de los ejemplos de funciones impares anteriores cumplen con esta definición.

8. ¿Cómo puedes saber si un polinomio de grado impar es una función impar?

9. ¿Son todas las funciones impares o pares?

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Reconocer productos especiales

Multiplica.

1. $(x+5)(x+5)$
2. $(x-3)(x-3)$
3. $(a+b)(a+b)$

4. Las respuestas de los problemas 1 al 3, se llaman **trinomios cuadrados perfectos**. ¿Por qué estas respuestas los hacen ser un **trinomio cuadrado perfecto**?

5. $(x+8)(x-8)$
6. $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
7. $(x+b)(x-b)$

8. Los productos en los problemas 5 al 7 terminan siendo binomios, y se llaman **diferencia de dos cuadrados.** ¿Por qué estas respuestas los hacen ser la **diferencia de dos cuadrados**?

   ¿Por qué no tienen un término medio como los problemas 1 al 3?

9. $(x-3)(x^2+3x+9)$
10. $(x+10)(x^2-10x+100)$
11. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

12. El trabajo en los problemas 9 a 11 hace parecer que las respuestas van a tener muchos términos. ¿Qué sucede en el trabajo del problema que hace que las respuestas sean binomios?

    Estas respuestas se llaman **diferencia de dos cubos** (# 9) y **suma de dos cubos** (# 10 y # 11.) ¿Por qué estas respuestas los hacen ser **la suma o la diferencia de dos cubos**?

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

PRÁCTICA

Tema: Determinación de valores de polinomios en cero y en $\pm\infty$. (Comportamiento final)

Indica la intersección de *y*, el grado y el comportamiento final de cada uno de los polinomios dados.

13. $f(x) = x^5 + 7x^4 - 9x^3 + x^2 - 13x + 8$

Intersección de *y*:

Grado:

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty$, $f(x) \to$ _____

Como $x \to +\infty$, $f(x) \to$ _____

14. $g(x) = 3x^4 + x^3 + 5x^2 - x - 15$

Intersección de *y*:

Grado:

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty$, $g(x) \to$ _____

Como $x \to +\infty$, $g(x) \to$ _____

15. $h(x) = -7x^9 + x^2$

Intersección de *y*:

Grado:

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty$, $h(x) \to$ _____

Como $x \to +\infty$, $h(x) \to$ _____

16. $p(x) = 5x^2 - 18x + 4$

Intersección de *y*:

Grado:

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty$, $p(x) \to$ _____

Como $x \to +\infty$, $p(x) \to$ _____

17. $q(x) = x^3 - 94x^2 - x - 20$

Intersección de *y*:

Grado:

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty$, $q(x) \to$ _____

Como $x \to +\infty$, $q(x) \to$ _____

18. $y = -4x + 12$

Intersección de *y*:

Grado:

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty$, $y \to$ _____

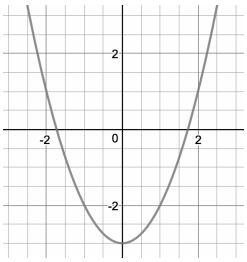
Como $x \to +\infty$, $y \to$ _____

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

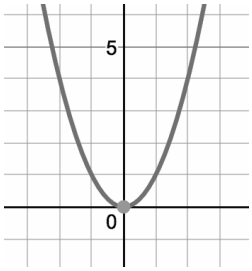
Tema: Identificar funciones pares e impares

19. Identifica cada función como par, impar o ninguna.

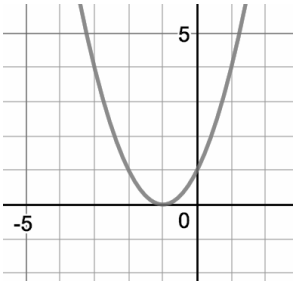
a) $f(x) = x^2 - 3$



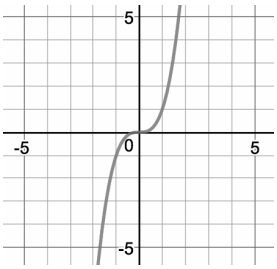
b) $f(x) = x^2$



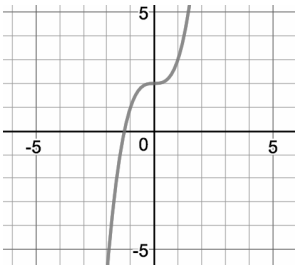
c) $f(x) = (x+1)^2$



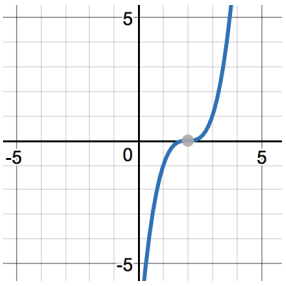
d) $f(x) = x^3$



e) $f(x) = x^3 + 2$



f) $f(x) = (x-2)^3$



RENDIMIENTO

Tema: Factorizar productos especiales

Completa los espacios en blanco en las siguientes oraciones.

20. La expresión $\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$ se llama **trinomio cuadrado perfecto**. Puedo reconocerlo porque el primer y último término siempre serán _____. El término medio será 2 veces el _____ y _____. Siempre habrá un signo _____ antes del último término.
Se factoriza: (_____)(_____).

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

21. La expresión $\boldsymbol{a^2 - b^2}$ se llama **diferencia de 2 cuadrados**. Puedo reconocerlo porque es un binomio y el primer y último término son _____. El signo entre el primer término y el último término es siempre _____ .
Se factoriza: (_____)(_____).

22. La expresión $\boldsymbol{a^3 + b^3}$ se llama **suma de 2 cubos**. Puedo reconocerlo porque es un binomio y el primer y último término son _____. La expresión $a^3 + b^3$ se factoriza en un binomio y un trinomio. Puedo recordarlo como un corto (_____) y un largo (_____). El signo entre los términos en el binomio es _____ como el signo en la expresión. El primer signo en el trinomio es _____ del signo en el binomio. Es por eso que todos los términos medios se cancelan al multiplicarse.
El último signo en el trinomio es siempre _____.
Se factoriza: (_____)(_____).

Factoriza usando lo que sabes sobre productos especiales.

23. $25x^2 + 30 + 9$

24. $x^2 - 16$

25. $x^3 + 27$

26. $49x^2 - 36$

27. $x^3 - 1$

28. $64x^2 - 240 + 225$

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

3.10 Rompecabezas Polinómicos

Actividad para Practicar Comprensión

CC BY Justin Taylor
https://flic.kr/p/4fUzTo

Para cada uno de los rompecabezas polinómicos a continuación, se dan algunos datos. Tu trabajo es usar esas piezas de información para completar el rompecabezas. De vez en cuando, puedes encontrar una pieza faltante que puedes completar tu mismo. Por ejemplo, aunque se proporcionan algunas de las raíces, puedes decidir que hay otras que tu puedes completar.

1.	**Función (en forma factorizada)** **Función (en forma estándar)** **Comportamiento final** $como\ \ x \to -\infty, \quad f(x) \to$ ____ $como\ \ x \to \ \infty, \quad f(x) \to$ ____ **Raíces (con multiplicidad):** -2, 1, y 1 **Valor del coeficiente principal:** -2 **Grado:** 3	Gráfica:

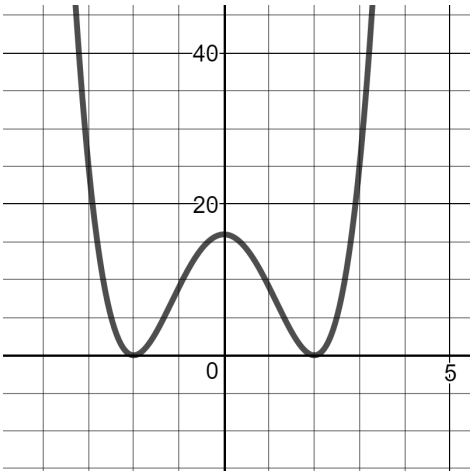
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

2.	**Función (en forma factorizada)** **Función (en forma estándar)** **Comportamiento final** $como \quad x \to -\infty, \qquad f(x) \to$ ____ $como \quad x \to \quad \infty, \qquad f(x) \to$ ____ **Raíces (con multiplicidad):** $2+i, 4, 0$ **Valor del coeficiente principal:** 1 **Grado:** 4	Gráfica:

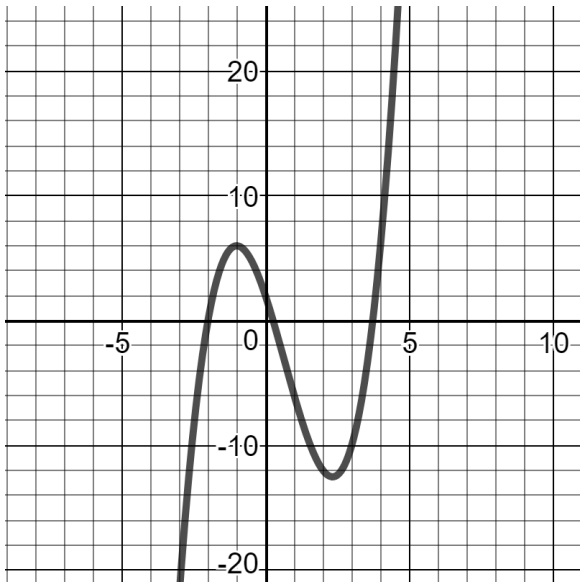
3.	**Función:** $f(x) = 2(x-1)(x+3)^2$ **Comportamiento final:** $como \quad x \to -\infty, \qquad f(x) \to$ ____ $como \quad x \to \quad \infty, \qquad f(x) \to$ ____ **Raíces (con multiplicidad):** **Valor del coeficiente principal:** **Dominio:** **Rango:** Todos los números reales	Gráfica:

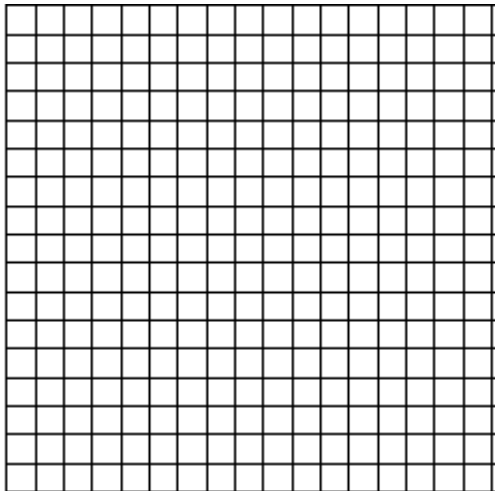
Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

4.	**Función** **Comportamiento final:** $como \;\; x \to -\infty, \quad f(x) \to \infty$ $como \;\; x \to \infty, \quad f(x) \to$ ____ **Raíces (con multiplicidad):** (3,0) m: 1; (-1,0) m: 2 (0,0) m: 2 **Valor del coeficiente principal:** -1 **Dominio:** **Rango:**	Gráfica:

5.	**Función:** **Comportamiento final:** $como \;\; x \to -\infty, \quad f(x) \to$ ____ $como \;\; x \to \infty, \quad f(x) \to$ ____ **Raíces (con multiplicidad):** **Valor del coeficiente principal:** 1 **Dominio:** **Rango:** **Otro:** $f(0) = 16$	Gráfica: 

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

6.	**Función (en forma estándar):** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 2$ **Función (en forma factorizada):** **Comportamiento final:** $como \;\; x \to -\infty, \quad f(x) \to$ ____ $como \;\; x \to \;\; \infty, \quad f(x) \to$ ____ **Raíces (con multiplicidad):** -2 **Dominio:** **Rango:**	Gráfica: 

7.	**Función (en forma estándar):** $f(x) = x^3 - 2x$ **Función (en forma factorizada):** **Comportamiento final:** $como \;\; x \to -\infty, \quad f(x) \to$ ____ $como \;\; x \to \;\; \infty, \quad f(x) \to$ ____ **Raíces (con multiplicidad):** **Dominio:** **Rango:**	Gráfica: 

Mathematics Vision Project
Licensed under the Creative Commons Attribution CC BY 4.0
mathematicsvisionproject.org

PREPARACIÓN, PRÁCTICA, RENDIMIENTO

Nombre Periodo Fecha

PREPARACIÓN

Tema: Reducir números y expresiones racionales

Reducir las expresiones a los términos mínimos. (Supongamos que ningún denominador es igual a 0).

1. $\frac{3x}{6x^2}$

2. $\frac{2\cdot 5\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y}{3\cdot 5\cdot x\cdot y\cdot y}$

3. $\frac{7ab^2}{7ab^2}$

4. $\frac{(x+2)(x-9)}{(x+2)(x-9)}$

5. $\frac{(3x-5)(x+4)}{(x-1)(3x-5)}$

6. $\frac{(2x-11)(3x+17)}{(2x-11)(3x-5)}$

7. $\frac{(8x-7)(x+3)}{8x(x+3)(2x-3)}$

8. $\frac{3x(2x+7)(x-1)(6x-5)}{x(2x+7)(x-1)(6x-5)}$

9. ¿Por qué es importante que las instrucciones digan que no debemos asumir que ningún denominador es igual a 0?

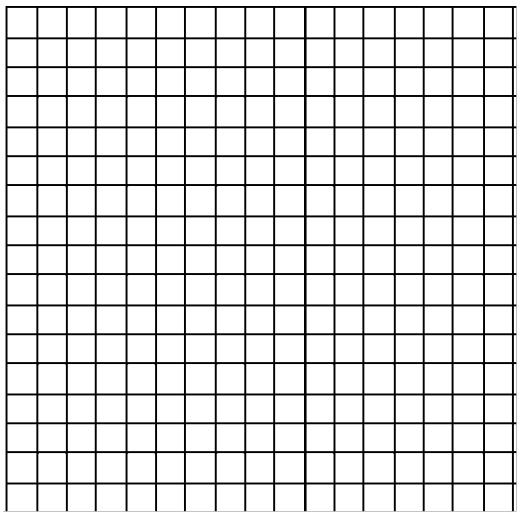
PRÁCTICA

Tema: Revisión de las características de los polinomios

Se ha dado alguna información para cada polinomio. Completa la información que falta.

10.

Gráfica:



Función: $f(x) = x^3$

Función en forma factorizada:

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty, f(x) \to$ _____

Como $x \to \infty, f(x) \to$ _____

Raíces (con multiplicidad):

Grado:

Valor del coeficiente principal:

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

11. **Gráfica:**

Función en forma estándar:

Función en forma factorizada: $g(x) = -x(x-2)(x-4)$

Comportamiento final:

Como $x \to -\infty, g(x) \to$ _____
Como $x \to \infty, g(x) \to$ _____

Raíces (con multiplicidad):

Grado:

Valor del coeficiente principal:

12. **Gráfica:**

Función en forma estándar: $h(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

Función en forma factorizada:

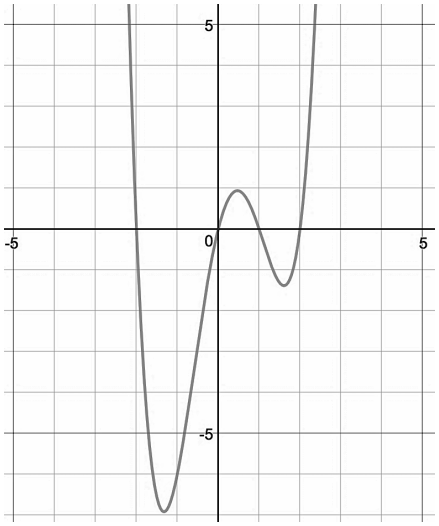
Comportamiento final:
Como $x \to -\infty, h(x) \to$ _____
Como $x \to \infty, h(x) \to$ _____

Raíces (con multiplicidad):

Grado:

Valor de $h(2)$:

13. **Gráfica:**



Función en forma estándar:

Función en forma factorizada:

Comportamiento final:
Como $x \to -\infty, f(x) \to$ _____
Como $x \to \infty, f(x) \to$ _____

Raíces (con multiplicidad):

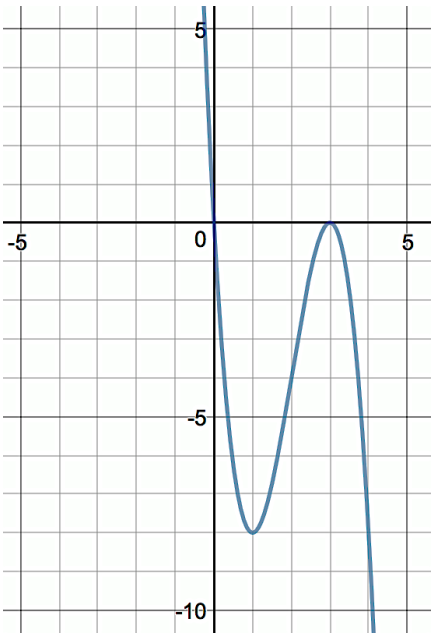
Grado:

Intersección de y:

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

14.

Gráfica:



Función en forma estándar:

Función en forma factorizada:

Comportamiento final:
Como $x \to -\infty, p(x) \to$ _____
Como $x \to \infty, p(x) \to$ _____

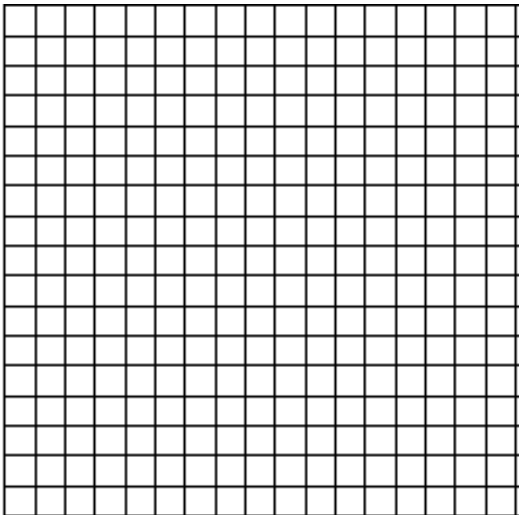
Raíces (con multiplicidad):

Grado:

Valor del coeficiente principal:

15.

Gráfica:



Función en forma estándar: $q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

Función en forma factorizada:

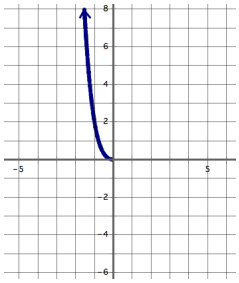
Comportamiento final:
Como $x \to -\infty, q(x) \to$ _____
Como $x \to \infty, q(x) \to$ _____

Raíces (con multiplicidad):
$x = i$

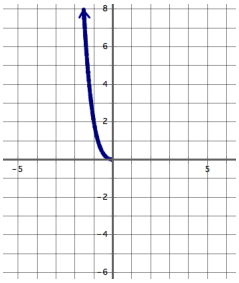
Grado:

Intersección de *y*:

16. Termina la gráfica si la función es una función par.



17. Termina la gráfica si la función es una función impar.



© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org

RENDIMIENTO

Tema: Escribir polinomios dados los ceros y el coeficiente principal

Escribe la función polinómica en forma estándar dado el coeficiente principal y los ceros de la función.

18. Coeficiente principal: 2; $raíces$: $2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

19. Coeficiente principal: -1; $raíces$: $1, 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3}$

20. Coeficiente principal: 2; $raíces$: $4i, -4i$

Completa los espacios en blanco para hacer una declaración verdadera.

21. Si $f(b) = 0$, entonces un factor de $f(b)$ debe ser _____.

22. La tasa de cambio en una función lineal es siempre una _____.

23. La tasa de cambio de una función cuadrática es _____.

24. La tasa de cambio de una función cúbica es _____.

25. La tasa de cambio de una función polinómica de grado n se puede describir mediante una función de grado _____.

© 2018 Mathematics Vision Project
All Rights Reserved for the Additions and Enhancements
mathematicsvisionproject.org